对求极限的几种方法的分析

梁娉婷[1],吕金慧[2]
(1.黄山学院 办公室,安徽 黄山 245041;2. 聊城一中,山东 聊城 252000)

摘 要:通过案例对求极限的几种方法进行了总结和讨论。

关键词:函数极限;解题方法
中图分类号:G623.5 文献标识码:A 文章编号:1672-447X(2008)03-0089-03

极限在整个高等数学中占有非常重要的地位,高等数学中微分、积分与无穷级数等概念,都是用极限来定义的,学好极限,就为以后的学习打下了良好的基础。

1 定义[1]

有很多同学对极限的定义不能很好的理解,极限研究的是函数的变化趋势,在自变量的某个变化过程中,对应的函数值能无限接近某个确定的数。以数列极限为例,我们并没有对 N 前项限制条件,只要从 $N+1$ 之后的所有项都无限接近于某一个数就可以了。通常在证明中采用逆向思维,找到符合条件的 N。

例1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0$

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{2n}-0\right|<\varepsilon$, 由于 $\left|\dfrac{1}{2n}-0\right|=\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$, 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可。取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$,当 $n>N$ 时,有 $n\geq N+1=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$,故

$$\left|\frac{1}{2n}-0\right|<\varepsilon$$

在求解 N 的过程中,可以适当放大不等式,来简化计算。用定义证明一个数是某一个函数的极限可以说是万能的,但这要求事先估计函数的极限是多少,并且证明过程又是非常麻烦的。

2 四则运算

应用四则运算法则,必须判断每一项的极限是否都存在。如果不满足四则运算的条件,可以试着采用约分、通分、有理化、三角变形等方法进行化简。

例2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

解: $x\to+\infty$ 时,$\sin\sqrt{x+1}$与 $\sin\sqrt{x}$的极限都不存在,但不能认为它们差的极限也不存在。

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})\\&=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0\end{aligned}$$

3 单调有界性准则[2]

由于单调递增数列必定有下界,因此对于单调递增数列只要证明数列有上界,该数列就一定收

收稿日期:2008-02-01
作者简介:梁娉婷(1982—),山东聊城人,黄山学院教师。

敛,同样的对于单调递减数列只要证明该数列有下界就可以了。

例 3 设有数列 $x_1=\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3+x_1},\cdots,$

$x_n=\sqrt{3+x_{n-1}},\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

证:易知 $x_2>x_1$,假设 $x_k>x_{k-1}$,那么

$$x_{k+1}-x_k=\sqrt{x_k+3}-\sqrt{x_{k-1}+3}=\frac{x_k-x_{k-1}}{\sqrt{x_k+3}+\sqrt{x_{k-1}+3}}>0$$

故 $x_{k+1}>x_k$,从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增。

因为 $x_1=\sqrt{3}<3$,假定 $x_k<3$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$$

故 $\{x_n\}$ 是有界的。$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,因为 $x_n=\sqrt{3+x_{n-1}}$,即 $x_{n+1}^2=3+x_n$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$

即 $A^2=3+A$

解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, A=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$(舍去)。

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 。

在本类型题中,只有证明该数列的极限确实存在了,才有求它的极限的必要,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在是必不可少的一步。

4 两个重要极限[3]

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 及其变形来求极限的重要方法。用两个重要极限求极限的过程中,要注意到自变量的趋向方式以及函数的形式。

虽然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 函数的形式一样,但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 中自变量 x 趋向于 ∞, 此时 $\dfrac{\sin x}{x}$ 属于无穷小量乘以有界量的形式,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ 。

虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 函数的形式一样,但 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 中自变量 x 趋向于 ∞,此时 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 属于 ∞^0 的形式。

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 应用时要注意到是 1^∞ 的形式,括号中为 1 加上某一项,指数为该项的倒数的形式。

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x+1})^x$

解:该式为 1^∞ 的形式,我们想办法与 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 的形式对应,要把括号中写成 1 加上某一项的形式,令 $\dfrac{x-1}{x+1}=1+t$,得 $t=\dfrac{-2}{x+1}$,

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{x+1})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{x+1})^{\frac{x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{x+1}\cdot x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}\text{。}$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解:该式为 ∞^0 的形式,并不是 1^∞ 的形式,所以不能写出 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ =e,正确解法是 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}}=e^0=1$$

5 罗必达法则

罗必达法则求极限虽然方便,但不是万能的,罗必达法则可以连续使用,但在每次使用中要验证是否满足罗必达法则的条件。罗必达法则的前两个条件是一看便知,很容易验证,第三个条件

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞)则是在计算过程中尝试验证的,若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞),则我们把第三个条件验证结束,罗必达法则成立,这时我们的计算过程也结束了。

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在,只说明应用罗必达法则的条件不成立,就不能用罗必达法则来计算,并不能说明 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在,此时要改用其它的方法来求。

罗必达法则计算中可以和等价无穷小代换、非零极限等结合起来应用。[4]

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}\overset{\text{等价无穷小代换}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\ \frac{0}{0}\text{型}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}型}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\cos x}$

分析：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\cos x}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，可是若应用罗必达法则，对分子分母求导后得 $\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$ 不存在，这是因为令 $f(x)=\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$，取 $x_n=\{2n\pi\}$，$x_n'=\{2n\pi+\frac{\pi}{2}\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=\infty$，而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{2-0}=\frac{1}{2}，\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{2-1}=1$$

两者不相等，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$ 不存在。

正确解法：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{2+\frac{1}{x}\cos x}=\frac{1}{2}$

一般地，当自变量 $x\to\infty$，函数中出现 sin*x*,cos*x*, 或者当自变量 $x\to 0$，函数中出现 $\sin\frac{1}{x}$, $\cos\frac{1}{x}$ 时，不宜用罗必达法则计算。

例 8　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

分析：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，尝试两次应用罗必达法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

造成了循环，第三个条件得不到验证，罗必达法则失效，处理的方法是分子分母同除以 x，得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$$

罗必达法则只适合于 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，其他未定式要化成这两种形式：

$$0\cdot\infty\to\frac{1}{\infty}\cdot\infty\to\frac{\infty}{\infty}或\qquad 0\cdot\infty\to 0\cdot\frac{1}{0}\to\frac{0}{0}$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

在应用罗必达法则时，如遇到函数中有 $\ln x$、e^x、x^μ 的形式，通常是把 $\ln x$、e^x 放到分子上，把放到 x^μ 分母上：

$$\infty-\infty\to\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\xrightarrow{通分}\frac{0-0}{0}\to\frac{0}{0}$$

例 10　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\overset{通分}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$

$$\left.\begin{matrix}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{matrix}\right\}\xrightarrow{取对数}\left\{\begin{matrix}0\cdot\ln 0\\\infty\cdot\ln 1\\0\cdot\ln\infty\end{matrix}\right\}\to 0\cdot\infty$$

例 11　$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x\overset{取对数}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}\overset{0\cdot\ln 0}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0=1$。

求极限的方法还有很多，可以把这些方法综合应用，达到事半功倍的效果。

参考文献：

[1]孙国正.杜先能.高等数学[M].合肥:安徽大学出版社,2003.

[2]张耀梓.郑仲三.微积分学[M].天津:天津大学出版社,1993.

[3]吴赣昌.微积分[M].北京:中国人民大学出版社,2006.

[4]宋洄.求极限的几种方法及误区[J].黄山学院学报 2006,(5):3-4.

责任编辑：胡德明

Analysis of Several Methods to Work out Limits

Liang Pingting[1], Lv Jinhui[2]

(1.Office, Huangshan College, Huangshan245000, China; 2.No.1 Middle School of Liaocheng, Liaocheng252000, China)

Abstract: It is very important to learn impressed mathematics to work out limits of functions .In this paper, several methods in this aspect are summarized and discussed in detail.

Key words: limits of functions; problem-solving method