非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程线性 θ-方法的散逸性

姚金然,[1] 张学华,[1] 赵 磊[2]
(1.黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041; 2.黄山学院 信息工程学院, 安徽 黄山 245021)

摘 要:研究了非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程及数值方法的散逸性问题。给出了关于此方程理论解散逸性的充分条件,并获得了一类求解此类问题的线性 θ-方法的数值散逸性结果,此结果表明所考虑的数值方法继承了该方程的散逸性。

关键词:非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程;散逸性;线性 θ-方法
中图分类号:O241.8 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2009)05-0001-06

1 引 言

科学与工程技术中的许多系统具有散逸性,即系统具有一有界吸引集,从任意初始条件出发的解经过有限时间后进入该吸引集并随后保持在里面。散逸性研究一直是动力系统研究中的重要课题。当数值求解这些系统时,自然希望数值方法能继承系统的该重要特性。1994 年,Humphries 和 Stuart[1]首次研究了 Runge-Kutta 方法对有限维系统的散逸性。1997 年,Hil[2]研究了其无穷维散逸性。2000 年,肖爱国[3]研究了 Hilbert 空间中散逸动力系统一般线性方法的散逸稳定性。同年黄乘明[4-6]将该研究扩展到常延迟动力系统,进一步获得了线性 θ-方法、Runge-Kutta 方法、单支方法对常延迟微分方程的散逸性结论。2004 年,田红炯[8]给出了有界变延迟微分动力系统及 θ-方法的散逸性结果。2006 年,文立平等[9]研究了一类求解分片延迟微分方程的线性多步法的散逸性,以及沃尔泰拉泛函微分方程的散逸性,[10]甘四清[11]研究了沃尔泰拉积分微分方程线性 θ-方法散逸性。2007 年,甘四清[12]研究了非线性沃尔泰拉延迟积分微分方程 θ-方法散逸性,姚金然等[13]研究了应用于此类系统的多步 Runge-Kutta 方法的数值散逸性。同年程珍和黄承明[14]给出了非线性中立型延迟微分方程散逸性的充分条件,并获得了线性多步法的数值散逸性结论。2008 年,文立平等[15]研究了一类非线性中立型延迟微分方程 θ-方法的散逸性。同年,王晚生等[16]研究了中立型分片延迟微分方程 Runge-Kutta 方法的散逸性。本文讨论了非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程线性 θ-方法的散逸性,并给出了该方程的散逸性结论及其证明,对一类线性 θ-方法的数值散逸性的充分条件进行了研究和讨论。

2 非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程的散逸性

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 C^d 中的内积,$\|\cdot\|$是该内积导出的范数。考虑非线性中立型 Volterra 延迟积分微分方程

$$\begin{cases} \left[y(t)-Ny(t-\tau)\right]'=f\Big(y(t), \\ y(t-\tau),\int_{t-2\tau}^{t-\tau}g\left(t,s,y(s)\right)ds\Big),t\geq 0 \\ y(t)=\varphi(t),t\leq 0\end{cases} \tag{2.1}$$

收稿日期:2009-04-10
基金项目:黄山学院科研基金资助(2008xkjq005)
作者简介:姚金然(1982-),山东临沂人,黄山学院数学系教师,硕士,研究方向为常微分方程数值解。

其中 τ 是一正常数，$N\in C^{d\times d}$是常数矩阵，满足 $\|N\|<1$，$\varphi(t)$连续，$f:C^d\times C^d\times C^d\to C^d$是一给定的连续函数，$g:[0,+\infty)\times[-2\tau,+\infty)\times C^d\to C^d$ 是连续函数，f和 g 分别满足以下条件：

$$\mathrm{Re}\langle u-Nv, f(u,v,w)\rangle\le\gamma(t)$$
$$+\alpha(t)\|u\|^2+\beta(t)\|v\|^2+\omega(t)\|w\|^2$$
$$u,v,w\in C^d, t\in[0,+\infty) \tag{2.2a}$$
$$\|g(t,s,u)\|\le c\|u\|, t\in[0,+\infty),$$
$$s\in[-2\tau,+\infty), u\in C^d, \tag{2.2b}$$

其中 $\gamma(t),\alpha(t),\beta(t),\omega(t)$，是定义在$[0,+\infty)$上的有界连续函数，$c$是常数。

定义 2.1 方程于 C^d上称为是散逸的，如果存在一有界集 $B\subset C^d$，使得对任意有界集 $\Phi\subset C^d$，存在一时刻$t_0=t_0(\Phi)$使得对任意给定的初始函数 $\varphi(t)\in C\times[-\tau,0]$，对所有$t\in[-\tau,0]$，$\varphi(t)\in\Phi$，当 $t\geqslant t_0$ 时相应的解$y(t)\in$B。B 称为该问题的吸引集。

命题 2.2 若函数 f 满足(2.2a)，则对任意 $t\geqslant0$ 有 $\gamma(t)\geqslant0$。

引理 2.3 设 $y(t)$是满足条件(2.2a)的系统(2.1)的解，对任意 $t\geqslant0$，$\alpha(t)\le0$，$\beta(t)\geqslant0$，$\omega(t)\geqslant0$ 则有

$$\|y(t_2)-Ny(t_2-\tau)\|^2$$
$$\le\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)\|y(t_1)-Ny(t_1-\tau)\|^2$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\gamma(\zeta)\exp\left(\int_{\zeta}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)$$
$$\cdot\exp\left(\int_{\zeta}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\max_{t_1-2\tau\le\xi\le t_2-\tau}\|y(\xi)\|^2,$$
$$\forall t_1,t_2:0\le t_1\le t_2<+\infty \tag{2.3}$$

证明：记

$$Y(t)=\|y(t)-Ny(t-\tau)\|^2$$
$$=\langle y(t)-Ny(t-\tau), y(t)-Ny(t-\tau)\rangle \tag{2.4}$$

由条件(2.2)有

$$Y'(t)=2\mathrm{Re}\langle y(t)-Ny(t-\tau),$$
$$f\left(y(t),y(t-\tau),\int_{t-2\tau}^{t-\tau}g(t,s,y(s))ds\right)\rangle$$
$$\le2\left(\gamma(t)+\alpha(t)\|y(t)\|^2+\beta(t)\|y(t-\tau)\|^2\right.$$
$$\left.+\omega(t)\left\|\int_{t-2\tau}^{t-\tau}g(t,s,y(s))ds\right\|^2\right)$$
$$\le2\left(\gamma(t)+\alpha(t)\|y(t)\|^2+\beta(t)\|y(t-\tau)\|^2\right.$$
$$\left.+\omega(t)\tau^2c^2\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2\right) \tag{2.5}$$

由(2.4)可得

$$Y(t)\le2\left(\|y(t)\|^2+\|Ny(t-\tau)\|^2\right)$$

所以

$$2\|y(t)\|^2\ge Y(t)-2\|Ny(t-\tau)\|^2$$

由(2.5)及$\alpha(t)\le0$ 可得

$$Y'(t)\le2\gamma(t)+\alpha(t)Y(t)-2\alpha(t)\|Ny(t-\tau)\|^2$$
$$+2\left(\beta(t)+\omega(t)\tau^2c^2\right)\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2$$
$$\le2\gamma(t)+\alpha(t)Y(t)+2\left(\beta(t)-\alpha(t)\|N\|^2\right.$$
$$\left.+\omega(t)\tau^2c^2\right)\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2,$$

则有

$$\frac{d}{dt}\left(Y(t)\exp\left(-\int_0^t\alpha(\eta)d\eta\right)\right)$$
$$\le2\left[\gamma(t)+\left(\beta(t)-\alpha(t)\|N\|^2+\omega(t)\tau^2c^2\right)\cdot\right.$$
$$\left.\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2\right]\exp\left(-\int_0^t\alpha(\eta)d\eta\right),$$

对任意t_1,t_2，$0\le t_1\le t_2$对上式从 t_1 到 t_2 积分可得

$$Y(t_2)\le\exp\left(\int_{t_1}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)Y(t_1)$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\gamma(\zeta)\exp\left(\int_{\zeta}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta$$
$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)\cdot$$
$$\exp\left(\int_{\zeta}^{t_2}\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\max_{t_1-2\tau\le\xi\le t_2-\tau}\|y(\xi)\|^2 \tag{2.6}$$

所以不等式(2.3)成立。引理 2.3 证毕。

定理 2.4 假设$y(t)$是满足条件(2.2)的系统(2.1)的解，对任意$t\geqslant0$，存在 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\gamma_0,\omega_0$，使得 $\alpha_1\le\alpha(t)\le\alpha_0\le0$，$\beta(t)\le\beta_0$，$\gamma(t)\le\gamma_0$，$\omega(t)\le\omega_0$ 且有

$$\sqrt{(1+\|N\|)^2\exp(\alpha_0\tau)+2\left(\beta_0+\omega_0\tau^2c^2-\alpha_1\|N\|^2\right)\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}}$$
$$+\|N\|<1 \tag{2.7}$$

则系统(2.1)是散逸的。

证明：对任意 $t\in[0,\tau]$，取$t_1=0$，$t_2=t$由(2.3)可得

$$\|y(t)-Ny(t-\tau)\|^2$$
$$\le\exp\left(\int_0^t\alpha(\eta)d\eta\right)\|y(0)-Ny(-\tau)\|^2$$
$$+2\int_0^t\gamma(\zeta)\exp\left(\int_{\zeta}^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta$$
$$+2\int_0^t\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)\cdot$$
$$\exp\left(\int_{\zeta}^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\max_{-2\tau\le\xi\le0}\|y(\xi)\|^2$$

$$\le\Big[\left(1+\|N\|\right)^2\exp\left(\int_0^t\alpha(\eta)d\eta\right)$$
$$+2\int_0^t\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)$$
$$\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\Big]\varphi_0^2$$
$$+2\int_0^t\gamma(\zeta)\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta,$$

其中 $\varphi_0=\max\limits_{-2\tau\le\xi\le0}\|\varphi(\xi)\|$ 。

所以 $\|y(t)-Ny(t-\tau)\|^2$
$$\le\Big[\left(1+\|N\|\right)^2+2\left(\beta_0-\alpha_1\|N\|^2+\omega_0\tau^2c^2\right)\cdot$$
$$\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}\Big]\varphi_0^2+\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}2\gamma_0,$$

则有

$$\|y(t)-Ny(t-\tau)\|$$
$$\le\sqrt{\left[\left(1+\|N\|\right)^2+2\left(\beta_0-\alpha_1\|N\|^2+\omega_0\tau^2c^2\right)\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}\right]}\varphi_0$$
$$+\sqrt{\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}2\gamma_0},$$

则有

$$\|y(t)\|\le C_0\varphi_0+r \tag{2.8}$$

其中

$$C_0=\sqrt{\left[\left(1+\|N\|\right)^2+2\left(\beta_0-\alpha_1\|N\|^2+\omega_0\tau^2c^2\right)\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}\right]}$$
$$+\|N\|,r=\sqrt{\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}2\gamma_0} \tag{2.9}$$

另外,对任意$t>\tau$,选取$t_1=t-\tau$,$t_2=t$则由(2.3)可知

$$\|y(t)-Ny(t-\tau)\|^2$$
$$\le\exp\left(\int_{t-\tau}^t\alpha(\eta)d\eta\right)\|y(t-\tau)-Ny(t-2\tau)\|^2$$
$$+2\int_{t-\tau}^t\gamma(\zeta)\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta$$
$$+2\int_{t-\tau}^t\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)\cdot$$
$$\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\max_{t-3\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2$$
$$\le\left(1+\|N\|\right)^2\exp\left(\int_0^t\alpha(\eta)d\eta\right)\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2$$
$$+2\int_0^t\gamma(\zeta)\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta$$
$$+2\int_0^t\left(\beta(\zeta)-\alpha(\zeta)\|N\|^2+\omega(\zeta)\tau^2c^2\right)\cdot$$
$$\exp\left(\int_\zeta^t\alpha(\eta)d\eta\right)d\zeta\max_{t-3\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2$$
$$\le\Big[\left(1+\|N\|\right)^2\exp(\alpha_0\tau)+2\left(\beta_0-\alpha_1\|N\|^2\right.$$
$$\left.+\omega_0\tau^2c^2\right)\Big]\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}\max_{t-3\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|^2$$
$$+\frac{\left(1-e^{\alpha_0\tau}\right)2\gamma_0}{-\alpha_0},$$

则有

$$\|y(t)\|\le C\max_{t-3\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|+r \tag{2.10}$$

其中

$$C=\sqrt{\left[\left(1+\|N\|\right)^2\exp(\alpha_0\tau)+2\left(\beta_0-\alpha_1\|N\|^2+\omega_0\tau^2c^2\right)\right]\frac{1-e^{\alpha_0\tau}}{-\alpha_0}}$$
$+\|N\|$。

则有

$$\|y(t)\|\le C\max_{t-3\tau\le\xi\le t-2\tau}\|y(\xi)\|+r \tag{2.11a}$$

或者

$$\|y(t)\|\le C\max_{t-2\tau\le\xi\le t-\tau}\|y(\xi)\|+r \tag{2.11b}$$

类似文献[4]中证明技巧,由(2.8),(2.11)递推可得

当 $C\left(C_0\varphi_0+r\right)\ge C_0\varphi_0$ 时,可得

$$\|y(t)\|\le C^kC_0\varphi_0+r\sum_{j=0}^kC^j,$$
$$t\in\left(k\tau,(k+1)\tau\right],k=1,2,\cdots \tag{2.12}$$

当 $C\left(C_0\varphi_0+r\right)<C_0\varphi_0$ 时,可得

$$\|y(t)\|\le C^kC_0\varphi_0+r\sum_{j=0}^kC^j,$$
$$t\in\left((2k-1)\tau,(2k+1)\tau\right],k=1,2,\cdots \tag{2.13}$$

由(2.12),(2.13)可知,系统(2.1)是散逸的。定理证毕。

注 2.5　当问题 (2.1) 右端函数不含有积分项,也即退化为非线性中立型延迟微分方程

$$\begin{cases}\left[y(t)-Ny(t-\tau)\right]'=f\left(y(t),y(t-\tau)\right)\\ t\ge0\\ y(t)=\varphi(t),-\tau\le t\le0\end{cases}$$

此方程的散逸性研究可参见文献[15]。

注 2.6　特别地,当 $N=0$ 时,系统(2.1)变为非线性 Volterra 延迟积分微分方程

$$\begin{cases}y'(t)=f\left(y(t),y(t-\tau),\int_{t-2\tau}^{t-\tau}g\left(t,s,y(s)\right)ds\right)\\ t\ge0\\ y(t)=\varphi(t),t\le0\end{cases}$$

由定理 2.4 可知,此系统是散逸的。

3 线性 θ–方法的散逸性

本节讨论应用于系统(2.1)的线性 θ–方法的散逸性。假设 $\alpha=\alpha(t),\beta=\beta t,\gamma=\gamma(t)$为常数。

考虑求解系统(2.1)的线性 θ–方法:

$$y_{n+1}-N\overline{y}_{n+1}=y_n-N\overline{y}_n+h\theta\cdot f(y_{n+1},\overline{y}_{n+1},\tilde{y}_{n+1})+h(1-\theta)f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n) \tag{3.1}$$

这里y_n是系统真解在$t_n=nh$的值$y(t_n)$的逼近,$\overline{y}_n$和$\tilde{y}_n$分别逼近 $y(t_n-\tau)$和 $\int_{t_n-2\tau}^{t_n-\tau}g(t,s,y(s))ds$ 。设$\tau=(m-)\delta h$,m为正整数,$\delta\in[0,1]$。$\overline{y}_n$可由下面线性插值程序获得:

$$\overline{y}_n=\delta y_{n-m+1}+(1-\delta)y_{n-m} \tag{3.2}$$

$\tilde{y}_n$ 可由下面插值程序获得:[17]

$$\begin{aligned}\tilde{y}_n=&\frac{h(1-\delta)^2}{2}g(t_n,t_{n-m},y_{n-m})\\&+\frac{h(2-\delta^2)}{2}g(t_n,t_{n-m+1},y_{n-m+1})\\&+h\sum_{k=2}^{m-1}g(t_n,t_{n-m+k},y_{n-m+k})\\&+\frac{h}{2}g(t_n,t_n,y_n)\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中当 $l\le 0$ 时,$y_l=\varphi(lh)$ 。

定义 3.1 称方法(3.1)为散逸的,如果该方法应用于满足条件(2.2)的系统(2.1),存在常数 r,使得对任意函数 $\varphi(t)$,存在 $n_0(\overline{\varphi},h)$, $\overline{\varphi}=\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\|\varphi(t)\|$,使得

$$\|y_n\|\le r,n\ge n_0 \tag{3.4}$$

定理 3.2 假设方法(3.1)满足 $\theta\in[1/2,1]$,系统(2.1)满足条件(2.2),且 $\beta\geqslant 0,\omega\geqslant 0,\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2<0$ 则该方法是散逸的。

证明:由(3.1)得

$$\begin{aligned}&y_{n+1}-N\overline{y}_{n+1}-h\theta f(y_{n+1},\overline{y}_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\\&=y_n-N\overline{y}_n+h(1-\theta)f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\end{aligned} \tag{3.5}$$

等式两边分别作内积,由 $\theta\in[1/2,1]$及条件(2.2)得

$$\begin{aligned}&\|y_{n+1}-N\overline{y}_{n+1}-h\theta f(y_{n+1},\overline{y}_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\|^2\\&=\|y_n-N\overline{y}_n-h\theta f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\|^2\\&+h^2(1-2\theta)\|f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\|^2\\&+2h\operatorname{Re}\langle y_n-N\overline{y}_n,f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\rangle\\&\le\|y_n-N\overline{y}_n-h\theta f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\|^2\\&+2h(\gamma+\alpha\|y_n\|^2+\beta\|\overline{y}_n\|^2+\omega\|\tilde{y}_n\|^2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

通过递推可得

$$\begin{aligned}&\|y_n-N\overline{y}_n-h\theta f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\|^2\\&\le\|y_0-N\overline{y}_0-h\theta f(y_0,\overline{y}_0,\tilde{y}_0)\|^2\\&+2nh\gamma+2h\alpha\sum_{j=0}^{n-1}\|y_j\|^2+2h\beta\sum_{j=0}^{n-1}\|\overline{y}_j\|^2\\&+2h\omega\sum_{j=0}^{n-1}\|\tilde{y}_j\|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

由(3.2)可知

$$\begin{aligned}\|\overline{y}_j\|^2&\le\delta^2\|y_{j-m+1}\|^2+(1-\delta)^2\|y_{j-m}\|^2\\&+\delta(1-\delta)\left(\|y_{j-m+1}\|^2+\|y_{j-m}\|^2\right)\\&=\delta\|y_{j-m+1}\|^2+(1-\delta)\|y_{j-m}\|^2\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(2.3),(3.3),

$$\frac{h(1-\delta)^2}{2}+\frac{h(2-\delta^2)}{2}+(m-2)h+\frac{h}{2}=\tau \tag{3.9}$$

以及柯西–施瓦兹不等式可得

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}_n\|^2&\le\tau\left(\frac{h(1-\delta)^2}{2}\|g(t_n,t_{n-m},y_{n-m})\|^2\right.\\&+\frac{h(2-\delta^2)}{2}\|g(t_n,t_{n-m+1},y_{n-m+1})\|^2\\&+h\sum_{k=2}^{m-1}\|g(t_n,t_{n-m+k},y_{n-m+k})\|^2\\&\left.+\frac{h}{2}\|g(t_n,t_n,y_n)\|^2\right)\\&\le\tau c^2\left(\frac{h(1-\delta)^2}{2}\|y_{n-m}\|^2\right.\\&+\frac{h(2-\delta^2)}{2}\|y_{n-m+1}\|^2\\&\left.+h\sum_{k=2}^{m-1}\|y_{n-m+k}\|^2+\frac{h}{2}\|y_n\|^2\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.7)–(3.10)及 $\tau=(m-\delta)h$可得

$$\begin{aligned}&\|y_n-N\overline{y}_n-h\theta f(y_n,\overline{y}_n,\tilde{y}_n)\|^2-2h\cdot\\&(\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2)\sum_{j=0}^{n-1}\|y_j\|^2\\&\le\|y_0-N\overline{y}_0-h\theta f(y_0,\overline{y}_0,\tilde{y}_0)\|^2\end{aligned}$$

$$+2nh\gamma+2h\beta\left(\sum_{j=-m+1}^{-1}\|y_j\|^2+(1-\delta)\|y_{-m}\|^2\right)$$
$$+2h\omega\tau c^2\left(\tau\sum_{j=-m+1}^{-1}\|y_j\|^2+\frac{h(1-\delta)^2}{2}\|y_{-m}\|^2\right)$$
$$\le\|y_0-N\bar{y}_0-h\theta f(y_0,\bar{y}_0,\tilde{y}_0)\|^2+2nh\gamma$$
$$+2\tau(\beta+\omega\tau^2c^2)\bar{\varphi}^2 \tag{3.11}$$

当 $\gamma=0$ 时,由(3.11)及 $\alpha+\beta+\omega\ \tau^2c^2<0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=0 \tag{3.12}$$

所以,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $m_0>0$,使得

$$\|y_n\|<\varepsilon,n>m_0 \tag{3.13}$$

当 $\gamma>0$ 时,利用类似于文献[5]的推导技巧可知,存在 $\tilde{r}>0,\tilde{m}_0>0$,使得

$$\|y_n-N\bar{y}_n\|\le\tilde{r},n\ge\tilde{m}_0 \tag{3.14}$$

其中

$$\tilde{r}=\sqrt{d_1+\frac{2\left(L_1+2\tau(\beta+\omega\tau^2c^2)d_1\right)+4(\tau+2h)\gamma}{1-2h\theta(\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2)}},$$

$$\tilde{m}_0=\frac{L_0+2\tau(\beta+\omega\tau^2c^2)d_0}{2h\gamma}+2m+1,$$

$$L_0=\sup_{\substack{\|u\|,\|v\|\le\sqrt{d_0}\\ \|w\|\le\tau c\sqrt{d_0}}}\|u-Nv-h\theta f(u,v,w)\|^2,$$

$u,v,w\in X$,

$$L_1=\sup_{\substack{\|u\|,\|v\|\le\sqrt{d_1}\\ \|w\|\le\tau c\sqrt{d_1}}}\left(\|u-Nv\|^2+h^2\theta^2\|f(u,v,w)\|^2\right),$$

$u,v,w\in X$,

$$d_0=\bar{\varphi}^2,d_1=\frac{4(m+1)\gamma}{-(\alpha+\beta+\omega\tau^2c^2)},$$

当 $m=1$ 时,由(3.14),(3.2)可得

$$\|y_n\|\le\tilde{r}+\left\|N\left(\delta y_n+(1-\delta)y_{n-1}\right)\right\|,$$
$$n\ge\tilde{m}_0, \tag{3.15}$$

则有

$$\|y_n\|\le\frac{\tilde{r}}{1-\delta\|N\|}+\frac{(1-\delta)\|N\|}{1-\delta\|N\|}\|y_{n-1}\|,$$
$$n\ge\tilde{m}_0 \tag{3.16}$$

由递推可得

$$\|y_n\|\le\frac{\tilde{r}}{1-\|N\|}+d_1,n\ge\tilde{m}_0, \tag{3.17}$$

当 $m\geq2$ 时,由(3.14),(3.2)可得

$$\|y_n\|\le\tilde{r}+\delta\|N\|\|y_{n-m+1}\|$$
$$+(1-\delta)\|N\|\|y_{n-m}\|,n\ge\tilde{m}_0 \tag{3.18}$$

由递推可知,(3.17) 对此种情况仍然成立。由(3.13)和(3.17)可知,该方法是散逸的。定理证毕。

推论 3.3　梯形方法是散逸的。

参考文献:

[1]Humphries A R, Stuart A M. Runge-Kutta methods for dissipative and gradient dynamical systems [J]. SIAM J. Numer.Anal,1994,31:1452-1485.

[2]Hill A T. Dissipativity of Runge-Kutta methods in Hilbert spaces[J]. BIT,1997,37:37-42.

[3]肖爱国.Hilbert 空间中散逸动力系统一般线性方法的散逸稳定性[J].计算数学,2000,22(4):429-436.

[4]Huang Chengming, Dissipativity of Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays [J]. IMA J. Numer. Anal,2000,20:153-166.

[5]黄乘明,陈光南.延迟动力系统线性 θ-方法的散逸性[J].计算数学,2000,22(4):501-506.

[6]Huang Chengming.Dissipativity of one-leg methods for dynamical systems with delays [J].Appl Numer Math, 2000,35:11-22.

[7]Huang Chengming. Chang Qianshun,Dissipativity of multistep Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays[J]. Math.Comp. Model,2004,40:1285-1296.

[8]Tian Hongjiong. Numerical and analytic dissipativity of θ-methds for delay differential equations with a bounded lag[J]. Int.J.Bifurcation Chaos,2004.14:1839-1845.

[9]文立平,余越昕,李寿佛.一类求解分片延迟微分方程的线性多步法的散逸性[J].计算数学,2006,28:67-74.

[10]Wen Liping,Li Shoufu.Dissipativity of Volterra functional differential equation[J].Math Appl,2006,324:696-706.

[11]Gan Siqing.Dissipativity of Linear θ-methods for integro-differential equations [J].Computers and Mathematics with Applications,2006,52:449-458.

[12]Gan Siqing. Dissipativity of θ-methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations [J].J Comput Appl Math,2007,206:898-907.

[13]姚金然,甘四清,殷乃芳,等.非线性 Volterra 延迟积分微分方程多步 Runge-Kutta 方法的散逸性[J].湖南文理学院学报,2007,19:1-4.

[14]程珍,黄乘明.非线性中立型延迟微分方程的散逸性[J].系统仿真学报,2007,19:3184-3187.

[15]Wen Liping,Wang Wansheng,Yu Yuexin.Dissipativity of θ- methods for a class of nonlinear neutral delay

dfferential equations [J]. Appl.Math.Comput.2008,202:780-786.

[16]Wang Wansheng,Li Shoufu.Dissipativity of Runge -Kutta methods for neutral delay differential equations with piecewise constant delay[J]. Appl.Math.Lett2008,21:983-991.

[17]T.Koto.Stability of θ -methods for delay integro - differential equations[J].Comput Appl Math,2003,161:393-404.

[18]Tian Hongjiong, Guo Ni.Asymptotic stability,contractivity and dissipativity of one -legθ - methods for non - autonomous delay functional differential equations [J]. Appl.Math.Comput. 2008,203(1):333-342

[19]Wen Liping,Yu Yuexin, Wang Wansheng. Generaozed Halanay inequalities for dissipativity of Volterra function differential equtions[J].Math.Anal.Appl, 2008,347(1):169-178.

[20]姚金然,甘四清,史可.非线性 Volterra 延迟积分微分方程 Runge-Kutta 方法的散逸性[J].系统仿真学报,2009,21(2)344-347.

[21]Gan Siqing. Dissipativity of θ-methods for nonlinear delay differential equations of neutral type, Applied Numerical Mathematics, doi:10.1016/j.apnum,2008-08-003.

责任编辑:胡德明

Dissipativity of Linear θ-methods for Nonlinear Volterra Delay-integro-differential Equations with Neutral Type

Yao Jinran, Zhang Xuehua, Zhao Lei

(1.Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan245041, China;

2. College of Information Engineering, Huangshan University, Huangshan245041, China)

Abstract: This paper is concerned with the dissipativity of nonlinear Volterra delay-integro-differential equations with neutral type. A sufficient condition for the dissipativity of theoretical solution of the mentioned problem above is given, and the dissipativity results are obtained for a class of linear θ-methods when they are applied to these problems. The result shows that the numerical methods inherit the dissipativity of the underlying problem.

Key words: nonlinear Volterra delay-integro-differential equation with neutral type; dissipativity; linearθ-method

非线性中立型Volterra延迟积分微分方程线性θ-方法的散逸性

作者： 姚金然， 张学华， 赵磊
作者单位： 姚金然,张学华(黄山学院教学系,安徽黄山,245041)， 赵磊(黄山学院信息工程学院,安徽黄山,245021)

刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2009，11(5)

参考文献(21条)

1. Humphries A R,Stuart A M.Runge-Kutta methods for dissipative and gradient dynamical systems[J].SIAM J.Numer.Anal,1994,31:1452-1485.

2. Hill A T.Dissipativity of Runge-Kutta methods in Hilbert spaces[J].BIT,1997,37:37-42.

3. 肖爱国.Hilbert空间中散逸动力系统一般线性方法的散遗稳定性[J].计算数学,2000,22(4):429-436.

4. Huang Chengming,Dissipativity of Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays[J].IMA J.Numer.Anal,2000,20:153-166.

5. 黄秉明,陈光南.延迟动力系统线性θ-方法的散逸性[J].计算数学,2000,22(4):501-506.

6. Huang Chengming.Dissipativity of one-leg methods for dynamical systems with delays[J].Appl Numer Math,2000,35:11-22.

7. Huang Chengming.Chang Qianshun.Dissipativity of muhistep Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays[J].Math.Comp.ModeL2004,40:1285-1296.

8. Tian Hongjiong.Numerical and analytic dissipativity of θ-methds for delay differential equations with a bounded lag[J].Intj.Bifurcation Chaos,2004.14:1839-1845.

9. 文立平,余越昕,李寿佛.一类求解分片延迟微分方程的线性多步法的散逸性[J].计算数学,2006,28:67-74.

10. Wen Liping,Li Shoufu.Dissipativity of Volterra functional differential equation[J].Math AppL2006,324:696-706.

11. Gan Siqing.Dissipativity of Linear θ-methods for integro-differential equations[J].Computers and Mathematics with Applieations,2006,52:449-458.

12. Gan Siqing.Diaaipativity of θ-methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations[J].J Comput Appl Math,2007,206:898-907.

13. 姚金然,甘四清,殷乃芳,等.非线性Volterra延迟积分微分方程多步Range-Kutta方法的散逸性[J].湖南文理学院学报,2007,19:1-4.

14. 程珍,黄秉明.非线性中立型延迟微分方程的散逸性[J].系统仿真学报,2007,19:3184-3187.

15. Wen Liping,Wang Wansheng,Yu Yuexin.Diaaipativity of θ-methods for a class of non]inear neutral delay dfferential equations[J].Appl.Math.Comput.2008,202:780-786.

16. Wang Wansheng,Li Shoufu.Dissipativity of Runge-Kutta methods for neutral delay differential equations with pieeewise constant delay[J].AppLMath.Lett.200821.983-991.

17. T.Koto.Stability of θ-methods for delay integro-differential equations[J].Comput Appl Math,2003,161:393-404.

18. Tian Hongjiong,Guo Ni.Asymptotie stability,eontraetivity and dissipativity of one-leg θ-methods

for non-autonomous delay functional differential equations[J].Appl.Math.Comput.2008,203(1):333-342

19. Wen Liping,Yu Yuexin,Wang Wansheng.Generaozed Halanay inequalities for dissipativity of Voherra function differential equtions[J].Math.Anal.Appl,2008,347(1):169-178.

20. 姚金然,甘四清,史可.非线性Volterra 廷迟分微分方程Runge-Kutta 方法的散逸性[J].系统仿真学报,2009,21(2)344-347.

21. Gan Siqing.Dissipativity of θ-methods for nonlinear delay differential equations of neutral type,Applied Numerical Mathematics,doi:10.1016/j.apnum,2008-08-003.

相似文献(0条)