第 12 卷第 3 期
2010 年 6 月

黄山学院学报
Journal of Huangshan University

Vol.12,NO.3
Jun.2010

数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}$的收敛值

肖清风,林慧敏

(黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041)

摘　要:利用傅里叶级数,得出 3 个递推公式,解决了 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$与交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$,当 $p=2k$ 时的收敛值问题。

关键词:傅里叶级数;递推公式;收敛值

中图分类号:O173.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:文章编号:1672-447X(2010)03-0005-03

1　引　言

在数项级数中,p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$与交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$收敛时,很少给出收敛值。一般给出少数几个,比如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}$。当 p 为奇数时,无法提供方法求其收敛值;当 p 为偶数时,利用傅里叶级数得出 3 个递推公式,皆可求其收敛值。

2　3个递推公式

设 $f_2(x)=x^2,-\pi\le x\le\pi$,其展开成周期为 2π 的傅里叶级数中:

$$a_0^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2d(\sin nx)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d(\cos nx)=\frac{4(-1)^n}{n^2}\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0\quad n=1,2,\cdots$$

因此$f_2(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$

当 $x=\pi$ 时,$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

当 $x=0$时,$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

设 $f_4(x)=x^4,-\pi\le x\le\pi$,其展开成周期为 2π 的傅里叶级数中:

$$a_0^{(4)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{2}{5}\pi^4$$

$$a_n^{(4)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\cos nxdx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4d(\sin nx)$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3\sin nxdx=\frac{4}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3d(\cos nx)$$

$$=8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{12}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{12}{n^2}a_n^{(2)}$$

$$=8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2}-48\frac{(-1)^n}{n^4}\qquad n=1,2,\cdots$$

$$b_n^{(4)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin nxdx=0\qquad n=1,2,\cdots$$

因此,$f_4(x)=\frac{\pi^4}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2}-48\frac{(-1)^n}{n^4}\right]\cos nx$

当 $x=\pi$ 时,$\pi^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$,

收稿日期:2009-12-08
作者简介:肖清风(1965-),安徽桐城人,黄山学院数学系讲师,研究方向为函数论。

$\frac{4}{5}\pi^4 = 8\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$。

当 $x=0$时，

$$0 = \frac{\pi^4}{5} - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4},$$

$$0 = \frac{\pi^4}{5} - 8\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{12} + 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7}{720}\pi^4 。$$

设 $f_{2k+2}(x) = x^{2k+2}\ \ -\pi \le x \le \pi$，$k = 1, 2, \cdots$ 其展开成周期为 2π 的傅里叶级数中：

$$a_0^{(2k+2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+2}dx = \frac{2}{2k+3}\pi^{2k+2}$$

$$\begin{aligned}a_n^{(2k+2)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+2}\cos nx dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+2} d(\sin nx) \\ &= -\frac{2k+2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+1}\sin nx dx \\ &= \frac{2k+2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+1} d(\cos nx) \\ &= \frac{2k+2}{n^2\pi}\Big[2\pi^{2k+1}(-1)^n \\ &\quad -(2k+1)\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k}\cos nx dx\Big] \\ &= 4(k+1)\pi^{2k}\frac{(-1)^n}{n^2} - (2k+2)(2k+1)\frac{1}{n^2}a_n^{(2k)}\end{aligned}$$

即 $a_n^{(2k+2)} = 4(k+1)\pi^{2k}\frac{(-1)^n}{n^2} - (2k+2)(2k+1)\frac{1}{n^2}a_n^{(2k)}$ (1)

$$b_n^{(2k+2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k+2}\sin nx dx = 0$$

因此，$f_{2k+2}(x) = \frac{1}{2k+3}\pi^{2k+2}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4(k+1)\pi^{2k}\frac{(-1)^n}{n^2} - (2k+2)(2k+1)\frac{1}{n^2}a_n^{(2k)}\right]\cos nx$$

当 $x=\pi$ 时，$\pi^{2k+2} = \frac{1}{2k+3}\pi^{2k+2} + 4(k+1)\pi^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$-(2k+2)(2k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(2k)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(2k)} = \frac{2k}{3(2k+1)(2k+3)}\pi^{2k+2} \qquad (2)$$

当 $x=0$时，$0 = \frac{1}{2k+3}\pi^{2k+2} - 4(k+1)\pi^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$+(2k+2)(2k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(2k)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(2k)} = \frac{k(2k+5)}{3(2k+1)(2k+2)(2k+3)}\pi^{2k+2} \qquad (3)$$

现在知道 $a_n^{(2)} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$。

利用它们，由递推公式(1)，(2)，可依次求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$，…；由递推公式(1)，(3)，可依次求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^8}$，…。

例 1：在(2)式中当 $k=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(2)} = \frac{2}{45}\pi^4$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{90}\pi^4$。

例 2：在(3)式中当 $k=1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(2)} = \frac{7}{180}\pi^4,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7}{720}\pi^4。$$

例 3：在(1)式中当 $k=1$ 时，

$$a_n^{(4)} = 8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2} - 12\frac{1}{n^2}a_n^{(2)} = 8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2} - 48\frac{(-1)^n}{n^4}。$$

在(2)式中当 $k=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(4)} = \frac{4}{105}\pi^6$，

$$8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{4}{105}\pi^6,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{945}\pi^6。$$

例 4：在(3)式中当 $k=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(4)} = \frac{1}{35}\pi^6$，

$$8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \frac{1}{35}\pi^6,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \frac{31}{30240}\pi^6。$$

例 5：在(1)式中当 $k=2$ 时，

$$\begin{aligned}a_n^{(6)} &= 12\pi^4\frac{(-1)^n}{n^2} - 30\frac{1}{n^2}a_n^{(4)} \\ &= 12\pi^4\frac{(-1)^n}{n^2} - 240\pi^2\frac{(-1)^n}{n^4} + 1440\frac{(-1)^n}{n^6}。\end{aligned}$$

在(2)式中当 $k=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(6)}=\frac{2}{63}\pi^8$，

$$12\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-240\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+1440\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{2}{63}\pi^8,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{1}{9450}\pi^8。$$

例 6:在(3)式中当 $k=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(6)}=\frac{11}{504}\pi^8$，

$$12\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}-240\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}+1440\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^8}=\frac{11}{504}\pi^8,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^8}=\frac{127}{1209600}\pi^8。$$

例 7:在(1)式中当 $k=3$ 时，

$$a_n^{(8)}=16\pi^6\frac{(-1)^n}{n^2}-56\frac{1}{n^2}a_n^{(6)}$$

$$=16\pi^6\frac{(-1)^n}{n^2}-672\pi^4\frac{(-1)^n}{n^4}+13440\pi^2\frac{(-1)^n}{n^6}-80640\frac{(-1)^n}{n^8}。$$

在(2)式中当 $k=3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}a_n^{(8)}=\frac{8}{297}\pi^{10}$

$$16\pi^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-672\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+13440\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}-80640\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}=\frac{8}{297}\pi^{10},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}=\frac{1}{93555}\pi^{10}。$$

例 8:在(3)式中当 $k=4$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}a_n^{(8)}=\frac{26}{1485}\pi^{10}$，

$$16\pi^6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}-672\pi^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}+13440\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^8}-80640\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{10}}=\frac{26}{1485}\pi^{10},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{10}}=\frac{73}{6842880}\pi^{10}。$$

如此，理论上由递推公式(1-3)皆可逐步求出所有的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}$ 的收敛值。

责任编辑:胡德明

The Convergency Values of Term Series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}$

Xiao Qingfeng, Lin Huimin

(Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan245021, China)

Abstract: Based on the Fourier's series, three recurrence formulas are obtained, and the convergency values of term series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}$, are solved when p=2k.

Key words: Fourier's series; recurrence formula; convergency value

数项级数∞∑n=1 1/n2k与∞∑n=1(-1)n+1/n2k的收敛值

作者： 肖清风， 林慧敏， Xiao Qingfeng， Lin Huimin
作者单位： 黄山学院,数学系,安徽,黄山,245041
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2010，12(3)

相似文献(2条)

1.期刊论文 温瑞萍 利用递推法求偶次p-级数的和 -太原师范学院学报(自然科学版)2003,2(1)

本文应用傅里叶(Fourier)级数的理论,获得了偶次p-级数求和的递推公式.

2.学位论文 刘柏希 考虑耗散力的抽油系统动力学分析及弹性机构振动控制 2008

机械系统中的耗散力是引起能量消耗和设备磨损的主要因素,同时耗散力对机械系统的动态性能及运转精度也有重要的影响。在机械系统分析与设计中充分考虑耗散力的影响,对于提高设备运行效率、节约能源、减轻振动、改善性能具有重要的理论与实际意义。本学位论文以定向井有杆抽油系统和平面弹性连杆机构为研究对象,对考虑耗散力的抽油系统动力学及弹性机构振动控制问题进行了深入研究。

由于库仑摩擦力与抽油杆柱弹性变形的耦合,使得现有定向井有杆抽油系统动态参数预测模型是一组非线性偏微分方程,求解复杂。鉴于此,提出了一种新的分析方法。该方法以定向井有杆抽油系统中的抽油杆柱作为研究对象,根据三次样条插值模拟得到的定向井的井眼轨迹,利用静力有限元法计算出了油管对抽油杆柱的支反力,进而得出了杆柱与油管之间的库仑摩擦力。在对杆柱单元受力分析基础上,建立了有限元形式的定向井有杆抽油系统动力学方程,并利用状态空间法进行数值求解,获得了该系统的动态参数及地面功图。将本方法计算结果与实测结果以及采用有限差分法的计算结果进行了对比,表明本文方法简便、正确、有效。

定向井有杆抽油系统动态特性分析过程中,抽油杆柱与油液之间粘性摩擦系数和抽油杆柱与油管之间库仑摩擦系数的确定是一个关键和困难的问题。提出了一种基于特征的方法来识别抽油系统摩擦系数。新方法针对现有的Freeman八方向链码码间距过大、采样必须为方格采样、编码过程需要人工干预的不足,对其进行了改进,并利用改进后的链码方法将封闭曲线链码化。根据封闭曲线的周期性,将其参数方程展成傅里叶级数,导出了傅曲叶系数与曲线链码之间的关系式。利用傅里叶系数计算封闭曲线的形状特征,建立了实测与仿真地面功图曲线形状特征间的欧氏距离。以该距离为优化目标函数,寻优得到使目标函数值满足给定误差的仿真地面功图曲线,该功图对应的一组摩擦系数即为相应抽油系统的粘性摩擦系数和库仑摩擦系数。基于该参数的动力学特性预测结果与实际吻合。

采用LuGre摩擦模型来描述有杆抽油系统的非线性摩擦,在此基础上对有杆抽油系统进行动力学分析。对LuGre摩擦模型中的六个参数进行了分析并给出了符合工程应用的参数值。将抽油系统中抽油杆柱的振动视为多级杆的纵向振动,对杆柱单元进行了受力分析,结合有限差分法与有限元法建立了杆柱的载荷和位移递推公式,并给出了杆柱载荷和位移的边界条件以及杆柱运动的初始条件。给出了采用LuGre摩擦模型的定向井仿真实例,并与采用经典库仑+粘性摩擦模型的计算结果进行了对比,结果表明LuGre摩擦模型能较好地反映低速换向时系统摩擦的非线性特性。提出了一种能够比较精确地确定井下各项耗散力耗能的计算方法。基于已知杆管间库仑摩擦力以及杆柱各节点的弹性运动速度,对抽油系统中库仑摩擦力、粘性摩擦力以及盘根盒摩擦力在一个抽油周期内的耗能进行了分析,导出了相应的耗能计算公式。根据地面功图计算出抽油机悬点载荷在一个抽汲周期所做的功,并对抽油系统井下效率进行了计算。为掌握抽油系统井下各环节的耗能情况提供了参考。对杆柱弹性运动速度引起的粘性摩擦力耗能进行了分析,结果表明杆柱弹性运动速度引起的粘性摩擦力耗能不能忽略。

研究了油井地层供液量与井底流压之间的流入动态关系。系统地分析了抽油系统的抽汲参数和沉没度对泵效的影响。根据油井产供平衡原则,以井下效率为目标函数对抽油系统进行了优化。结果表明,优化可明显提高井下效率,降低生产成本。同时也表明油井沉没度对泵效和井下效率的影响比抽汲参数更为明显。

基于阻尼合金的大阻尼能量耗散特性,将其用作弹性机构系统振动被动控制材料。利用粘弹性五参量本构关系来描述阻尼合金材料的应力应变关系。导出了以五参量表示阻尼和刚度特性的单元运动微分方程。为了便于计算,首先将包含卷积运算的微分方程转换成一个四阶常微分方程,进而装配出系统运动微分方程。利用状态空间法对该高阶时变微分方程组进行了数值求解。给出了含阻尼合金构件平面弹性四连杆机构的动力学响应计算实例,结果表明五参量结构阻尼模型克服了三参量阻尼模型中耗散因子在频域是单峰函数的局限,能够更好地描述阻尼合金的阻尼特性。