

判定广义对角占优矩阵的若干充分条件

谭发龙, 方 辉, 林慧敏

(黄山学院 数学系, 安徽 黄山 245041)

摘 要: 给出了广义对角占优矩阵的几个新的充分条件, 并用数值例子说明这些条件的实用性。

关键词: 对角占优矩阵; 广义对角占优矩阵; 不可约矩阵

中图分类号: O151 文献标识码: A 文章编号: 1672-447X(2010)03-0012-03

1 引 言

广义对角占优矩阵是一类范围很广的特殊矩阵, 这类矩阵是矩阵论的重要问题之一。本文利用 α -对角占优矩阵给出了一组判定条件, 改进了文献^[1]中的一些结果。

用 $C^{n \times n}$ 表示 n 阶复矩阵集, 设

$$A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}, N = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$R_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \forall i \in N$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \quad \forall i \in N$$

定义1:^[2]设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若 $|a_{ii}| \geq R_i$ ($\forall i \in N$), 则称 A 是对角占优矩阵, 若 $|a_{ii}| > R_i$ ($\forall i \in N$), 则称 A 是严格对角占优矩阵, 若存在一个正对角矩阵 D 使得 AD 是严格对角占优矩阵, 则称 A 是广义严格对角占优矩阵。

定义2: 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若存在一个 $\alpha \in (0, 1]$, 使得 $|a_{ii}| \geq \alpha R_i + (1-\alpha)Q_i$ ($\forall i \in N$) (1) 都成立, 则称 A 是 α -对角占优矩阵。若(1)式中每个不等式都严格成立, 则称 A 是 α -严格对角占优矩阵, 若存在一个正对角矩阵 D 使得 AD 是 α -严格对角占优矩阵, 则称 A 是 α -广义严格对角占优矩阵。

2 主要结果

引理1:^[3]设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若 A 是不可约的, 则对于 $n \geq 2$ 有 $R_i > 0, Q_i > 0, \forall i \in N$ 。

引理2:^[4]设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若存在一个 $\alpha \in (0, 1]$, 使得 A 是 α -严格对角占优矩阵, 则 A 是严格对角占优矩阵。

引理3:^[4]设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若存在一个 $\alpha \in (0, 1]$, 使得 A 是 α -广义严格对角占优矩阵, 则 A 是严格对角占优矩阵。

定理1: 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若 $\exists \alpha \in (0, 1]$ 使得

$$\sigma = \sum_{i=1}^n S_i < 1, \text{ 其中 } S_i = \frac{\alpha R_i}{|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i}。$$

并且 $\forall i \in N$ 都有 $|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i > 0$, 则 A 是广义严格对角占优矩阵。

证: 作正对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 其中 $d_i = S_i + \varepsilon, \varepsilon > 0$, 令 $B = AD = (b_{ij})$ 则

$$\begin{aligned} & |b_{ii}| - \alpha \sum_{j=1}^n |b_{ij}| - (1-\alpha) \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \\ &= |a_{ii}|(S_i + \varepsilon) - \alpha \sum_{j=1}^n |a_{ij}|(S_j + \varepsilon) - (1-\alpha) \sum_{j=1}^n |a_{ji}|(S_j + \varepsilon) \\ &\geq |a_{ii}|(S_i + \varepsilon) - \alpha \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \left(\sum_{j=1}^n (S_j + \varepsilon) \right) - (1-\alpha) \left(\sum_{j=1}^n |a_{ji}| \right) (S_i + \varepsilon) \\ &= |a_{ii}|(S_i + \varepsilon) - \alpha R_i (\sigma - S_i + (n-1)\varepsilon) - (1-\alpha) Q_i (S_i + \varepsilon) \end{aligned}$$

收稿日期: 2010-03-20

作者简介: 谭发龙(1983-), 湖南邵东人, 黄山学院数学系教师, 研究方向为矩阵论。

$$= (|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i)(S_i + \varepsilon) - \alpha R_i(S_i + \varepsilon + \sigma - S_i + (n-1)\varepsilon) \\ = (|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i)\varepsilon + \alpha R_i(1 - (\sigma + n\varepsilon))$$

ε 充分小时, $1 - (\sigma + n\varepsilon) > 0$ 则

$$(|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i)\varepsilon > 0$$

故 A 是 α -广义严格对角占优矩阵, 从而由引理 2 有 A 是广义严格对角占优矩阵。

注: 当 $\alpha=1$ 时, 就是^[9]中定理 1 的一个结果。

定理 2: 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ($n \geq 3$), 且 A 是不可约的, 若 $\exists \alpha \in (0, 1]$ 使得

$$\sigma = \sum_{i=1}^n S_i \leq 1, \text{ 其中 } S_i = \frac{\alpha R_i}{|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i}$$

并且 $\forall i \in N$ 都有 $|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i > 0$, 则 A 是广义严格对角占优矩阵。

证: 若 $\sigma = \sum_{i=1}^n S_i < 1$, 由定理 1 可得 A 是广义严格对角占优矩阵;

只需考虑 $\sigma = \sum_{i=1}^n S_i = 1$, 又由于 A 是不可约的, 则

$$R_i > 0, Q_i > 0, \text{ 从而 } S_i > 0;$$

作正对角矩阵 $D = \text{diag}(S_1, S_2, \dots, S_n)$, 令 $B = AB = (b_{ij})$,

于是 $\forall i \in N$ 有 $b_{ii} - \alpha \sum_{j \neq i} |b_{ij}| - (1-\alpha) \sum_{j \neq i} |b_{ji}|$

$$\begin{aligned} &= |a_{ii}| S_i - \alpha \sum_{j \neq i} |a_{ij}| S_j - (1-\alpha) \sum_{j \neq i} |a_{ji}| S_i \\ &> |a_{ii}| S_i - \alpha (\sum_{j \neq i} |a_{ij}|) (\sum_{j \neq i} S_j) - (1-\alpha) \sum_{j \neq i} |a_{ji}| S_i \\ &= |a_{ii}| S_i - \alpha R_i (\sigma - S_i) - (1-\alpha) Q_i S_i \\ &= |a_{ii}| S_i - \alpha R_i (1 - S_i) - (1-\alpha) Q_i S_i \\ &= |a_{ii}| S_i + \alpha R_i S_i - (1-\alpha) Q_i S_i - \alpha R_i = 0 \end{aligned}$$

故 A 是 α -广义严格对角占优矩阵, 从而由引理 2 有 A 是广义严格对角占优矩阵。

定理 3: 设 N_1, N_2 是 N 的一个划分, $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$, 若 $\exists \alpha \in (0, 1]$ 使得

$$\sigma = \sum_{i \in N_2} S_i < 1, \text{ 其中 } S_i = \frac{\alpha R_i}{|a_{ii}| + \alpha (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) - (1-\alpha)Q_i}.$$

和 $\forall i \in N_1$, 有 $|a_{ii}| > \alpha (\sum_{j \in N_2} |a_{ij}| S_j + \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}|) + (1-\alpha)Q_i$

并且 $\forall i \in N$ 都有 $|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i > 0$, 那么 A 是广义严格对角占优矩阵。

证: 作正对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 其中 $\text{当 } i \in N_1 \text{ 时 } d_i = 1, \text{当 } i \in N_2 \text{ 时 } d_i = S_i + \varepsilon, \varepsilon > 0$; 令 $B = AD = (b_{ij})$, 于是当 $i \in N_1$ 时有

$$\alpha (\sum_{j \neq i} |a_{ij}| d_j) + (1-\alpha) (\sum_{j \neq i} |a_{ji}| d_j)$$

$$= \alpha (\sum_{j \in N_2} |a_{ij}| d_j + \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| d_j) + (1-\alpha) (\sum_{j \neq i} |a_{ji}| d_j)$$

$$= \alpha (\sum_{j \in N_2} |a_{ij}| (S_j + \varepsilon) + \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}|) + (1-\alpha) Q_i$$

当 ε 充分小时, 上式 $< |a_{ii}|$

当 $i \in N_2$, 这时 N_2 设有 n_2 个元素, 有

$$\begin{aligned} &|a_{ii}| d_i - \alpha (\sum_{j \neq i} |a_{ij}| d_j) - (1-\alpha) (\sum_{j \neq i} |a_{ji}| d_j) \\ &= |a_{ii}| (S_i + \varepsilon) - \alpha (\sum_{j \in N_1} |a_{ij}| d_j + \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}| d_j) \\ &\quad - (1-\alpha) Q_i (S_i + \varepsilon) \\ &\geq |a_{ii}| (S_i + \varepsilon) - \alpha (\sum_{j \in N_1} |a_{ij}| + (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) (\sum_{j \in N_2, j \neq i} d_j)) \\ &\quad - (1-\alpha) Q_i (S_i + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |a_{ii}| (S_i + \varepsilon) - \alpha (\sum_{j \in N_1} |a_{ij}| + (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) \\ &\quad (\sigma - S_i + (n_2 - 1)\varepsilon)) - (1-\alpha) Q_i (S_i + \varepsilon) \\ &= (|a_{ii}| + \alpha (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) - (1-\alpha) Q_i) (S_i + \varepsilon) \\ &\quad - \alpha \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| - \alpha (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) (\sigma + n_2 \varepsilon) \end{aligned}$$

当 ε 充分小时, $\sigma + n_2 \varepsilon < 1$ 从而

$$\begin{aligned} &\text{上式} > (|a_{ii}| + \alpha (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) - (1-\alpha) Q_i) \varepsilon \\ &\quad + \alpha R_i - \alpha \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| - \alpha (\sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|) \\ &= (|a_{ii}| + \alpha (\sum_{j \in N_1} |a_{ij}|) - (1-\alpha) Q_i) \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

因而, $\forall i \in N$ 时都有

$$|a_{ii}| d_i > \alpha (\sum_{j \neq i} |a_{ij}| d_j) + (1-\alpha) (\sum_{j \neq i} |a_{ji}| d_j)$$

即 A 是 α -广义严格对角占优矩阵, 从而由引理 2 有 A 是广义严格对角占优矩阵。

注: 当 $\alpha=1$ 时, 就是^[1]中定理 2 的一个结果。

3 数值算例

$$\text{例: 设 } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{R_i}{|a_{ii}| + R_i} &\geq \sum_{i=1}^3 \frac{\max_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}| + \max_{j \neq i} |a_{ij}|} \\ &= \frac{3}{3+3} + \frac{4}{4+4} + \frac{2}{7+2} > 1, \end{aligned}$$

因而由文献[1]中的条件无法判定,但是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha R_i}{|a_{ii}| + \alpha R_i - (1-\alpha)Q_i} \\ &= \frac{4\alpha}{3+4\alpha-3(1-\alpha)} + \frac{5\alpha}{4+5\alpha-3(1-\alpha)} \\ &+ \frac{4\alpha}{7+4\alpha-7(1-\alpha)} \\ &= \frac{4}{7} + \frac{5\alpha}{1+8\alpha} + \frac{4}{11} = \frac{72}{77} + \frac{5\alpha}{1+8\alpha}, \end{aligned}$$

取 α 充分小时,上式即可小于 1,从而由定理 1 得 A

是广义严格对角占优矩阵。

参考文献:

- [1]徐仲,陆全.判定广义严格占优矩阵的一组充分条件[J].工程数学学报,2001,18(3):11-15.
- [2]Roger A.Horn,Charles R.Johnson. Matrix Analysis[M].北京:人民邮电出版社,2005:349-350.
- [3]陈公宁.矩阵理论与应用[M].北京:科学出版社,2007:213-214.
- [4]孙玉祥.广义严格占优矩阵的充分条件[J].高等学校计算数学学报,1997,19(3):216-223.
- [5]谢清明.判定广义严格占优矩阵的几个充分条件[J].工程数学学报,2006,23(4):757-761.

责任编辑:胡德明

Sufficient Conditions for Generalized Diagonally Dominant Matrices

Tan Falong, Fang Hui, Lin Huiming

(Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan245041, China)

Abstract: This paper provides some new sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices, and shows the effectiveness of these conditions by a numerical example.

Key words: diagonally dominant matrices; generalized diagonally dominant matrices; irreducible matrix

判定广义对角占优矩阵的若干充分条件

作者: [谭发龙](#), [方辉](#), [林慧敏](#), [Tan Falong](#), [Fang Hui](#), [Lin Huiming](#)
 作者单位: [黄山学院, 数学系, 安徽, 黄山, 245041](#)
 刊名: [黄山学院学报](#)
 英文刊名: [JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY](#)
 年, 卷(期): 2010, 12(3)
 被引用次数: 0次

参考文献(5条)

- 徐仲, 陆全. [判定广义严格对角占优矩阵的一组充分条件](#) 2001(3)
- Roger A. Horn, Charles R. Johnson. [Matrix Analysis](#) 2005
- 陈公宁. [矩阵理论与应用](#) 2007
- 孙玉祥. [广义严格占优矩阵的充分条件](#) 1997(3)
- 谢清明. [判定广义严格占优矩阵的几个充分条件](#) 2006(4)

相似文献(10条)

- 期刊论文 [苏岐芳, 李希文, Su QiFang, Li Xiwen](#) [非广义对角占优矩阵的判定准则](#) -[应用数学与计算数学学报](#) 2007, 21(2)
 给出了判定非广义对角占优矩阵的充要条件, 从理论上彻底解决了不可约非广义对角占优矩阵的判定问题, 并给出了判定不可约非广义对角占优矩阵的具体算法.
- 期刊论文 [吕志军](#) [从数学教育学看广义对角占优矩阵](#) -[中国科教创新导刊](#) 2007(6)
 给出了广义对角占优矩阵的定义及相关的理论, 判断的条件, 最后讨论了一种特殊广义对角占优矩阵的逆.
- 期刊论文 [苏岐芳, SU Qi-fang](#) [广义对角占优矩阵的迭代判定法](#) -[工程数学学报](#) 2006, 23(1)
 证明了矩阵不是广义对角占优矩阵的充要条件, 并给出了判定矩阵不是广义对角占优矩阵或不是M-矩阵的迭代算法, 从而使得对广义对角占优矩阵和M-矩阵的判定问题在实际应用中更加简便而有效.
- 期刊论文 [靳曼莉, 赫奕华, 逢明贤, JIN Man-li, HE Yi-hua, PANG Ming-xian](#) [块广义对角占优矩阵的等价表征](#) -[北华大学学报\(自然科学版\)](#) 2008, 9(1)
 在块对角占优矩阵和广义块对角占优矩阵的概念的基础上, 引入了块局部双对角占优矩阵的概念, 应用矩阵分块方法, 给出了判定分块矩阵为块广义对角占优矩阵的充分条件.
- 期刊论文 [马铭泽, 张丽伟, 宋岱才, MA Mingze, ZHANG Liwei, SONG Daicai](#) [广义 \$\alpha\$ -对角占优矩阵与非奇异H-矩阵的判别](#) -[长春理工大学学报\(自然科学版\)](#) 2010, 33(3)
 设 $A=(a_{ij}) \in C_n \times n$, 若存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使 $(\forall) i \in N=(1, 2, \dots, n)$, 有 $|a_{ii}| > \alpha R(A) + (1-\alpha) S_1(A)$, 则称A为严格 α -对角占优矩阵. 首先推广严格 α -对角占优矩阵的概念到广义严格 α -对角占优矩阵; 然后得到了判别广义 α -对角占优矩阵的两个新的充分条件, 改进和推广了已有的结论, 进一步丰富和完善了 α -对角占优矩阵和H-矩阵的理论. 最后举例说明了所给结果的优越性. 为相关领域如矩阵论、控制论、经济数学等提供了理论研究基础.
- 期刊论文 [郭志军, 刘建州, GUO Zhi-jun, LIU Jian-zhou](#) [局部双 \$\alpha\$ 对角占优矩阵及其应用](#) -[工程数学学报](#) 2005, 22(6)
 本文提出了两类局部双 α 对角占优矩阵, 给出了其为广义严格对角占优矩阵的几个充分条件, 并用数值例子说明了所得结果的有效性.
- 期刊论文 [张泰, 朱艳, 张成毅, 苗俊红, Zhang Tai, Zhu Yan, Zhang Chengyi, Miao Junhong](#) [弱广义对角占优矩阵的新性质](#) -[海南师范大学学报\(自然科学版\)](#) 2007, 20(2)
 给出了弱广义对角占优矩阵必有对角占优行这一结论, 并证明当弱广义对角占优矩阵为不可约时, 该结果还可以有更好的改进.
- 期刊论文 [田素霞, TIAN Su-xia](#) [广义对角占优矩阵的等价条件](#) -[河南科学](#) 2007, 25(5)
 介绍了对角占优矩阵和 α -对角占优矩阵的概念, 给出了广义对角占优矩阵的若干判定条件.
- 期刊论文 [丁碧文, 刘建州, Ding Biwen, Liu Jianzhou](#) [广义对角占优矩阵的充分条件](#) -[数学研究](#) 2005, 38(4)
 给出了一类局部双对角占优矩阵, 进而获得了几个新的广义对角占优矩阵的充分条件.
- 学位论文 [江如](#) [关于广义对角占优矩阵的判定](#) 2009
 本文研究了广义对角占优矩阵的判定问题, 给出了一些新的判定方法. 首先, 利用 α -对角占优矩阵的性质, 通过对元素下标集的不同划分, 给出若干判定广义对角占优矩阵的充分条件, 推广了文献[2, 3, 8, 10, 15]中的相应结果. 其次, 从比较矩阵与广义对角占优矩阵的关系出发, 通过选取适当的正对角矩阵D, 也得到几个简明实用的判定法则. 另外, 文中还举了若干数值例子说明了这些方法的实用性.

