一种类型的薛定谔方程求解

汪贤才

(池州学院 物理系, 安徽 池州 247000)

摘　要:运动原子与光场作用模型的薛定谔方程都是变系数微分方程,提出运动原子与光场共振作用的薛定谔方程经过适当方法处理可以变为常系数微分方程,能够得到精确解。

关键词:量子光学;薛定谔方程;变系数微分方程;常微分方程

中图分类号:O431.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-447X(2010)03-0018-03

量子光学常常研究原子与光场发生相互作用呈现的一些量子特性,其关键是建立相关模型的薛定谔方程,然后求得波函数的解析解,从而得出量子系统的所有非经典特性。如果原子静止在光腔中与光场作用模型的薛定谔方程都是常系数微分方程,当研究考虑原子的运动时,模型对应的薛定谔方程是变系数微分方程,一般难以得到解析解。但有一种类型的薛定谔方程经过处理可以变为常系数微分方程,得到精确解,而且关于此类方程求解还未见报道。

1　模型及对应方程

1.1　二能级原子与单模光场作用系统

在腔量子电动力学技术中,采用让一原子束沿轴向通过矩形或圆柱形腔而与不同的光场发生相互作用的方法,来考察模场与原子耦合产生的各种量子效应。在旋波近似下二能级原子与光场作用系统的哈密顿量可表示为:[1]

$$H=\omega a^{+}a+\omega_0 S_z+gf(z)(S_{+}a+a^{+}S_{-})\quad(\hbar=1)\tag{1}$$

式中a^{+},a分别是频率为 ω 的光场产生和湮没算符,S_z和$S_{\pm}$分别是原子反转和跃迁算符,ω_0 为原子的跃迁频率,g为原子和模场的耦合常数,$f(z)$是腔场模的形状函数。设原子沿Z轴运动,因此,只需考虑场模形状函数对Z轴的依赖关系。原子的运动可具体化为:

$$f(z)\rightarrow f(vt)=\sin\left(\frac{p\pi vt}{L}\right)\tag{2}$$

式中v表示原子的运动速度,p表示长度为L的腔场模的半波数。不失一般性,选择原子速度$v=\frac{gL}{\pi}$,考虑共振情形 $\omega=\omega_0$。假定原子在$t=0$时刻进入腔时处于基态和激发态的相干叠加态:

$$|\psi_A(0)\rangle=\cos\frac{\gamma}{2}|2\rangle+\sin\frac{\gamma}{2}e^{-i\varphi}|1\rangle\tag{3}$$

经半个波长后离开腔,光场是单模腔场,设

$$|\psi_f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}C_n|n\rangle\tag{4}$$

则整个系统的初始态矢为

$$|\psi(0)\rangle=\sum_{n=0}^{M}\{C_n\cos\frac{\gamma}{2}|2,n\rangle+C_n\sin\frac{\gamma}{2}e^{-i\varphi}|1,n\rangle\}\tag{5}$$

随时间的演化,t时刻系统的态矢在相互作用绘景中可表示为

$$|\psi^{I}(t)\rangle=\sum_{n=0}^{M}\{a_n(t)|2,n\rangle+b_{n+1}(t)|1,n+1\rangle\}\tag{6}$$

在(6)式给定的初始条件下,求解相互作用绘景下系统的 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases}i\dfrac{da_n(t)}{dt}=g\sqrt{n+1}\sin(pgt)b_{n+1}(t)\\ i\dfrac{db_{n+1}(t)}{dt}=g\sqrt{n+1}\sin(pgt)a_n(t)\end{cases}\tag{7}$$

收稿日期:2009-11-24

作者简介:汪贤才(1968-),安徽池州人,池州学院物理与机电工程系副教授,硕士,研究方向为量子光学和量子信息。

简化后可得到如下形式的二阶变系数微分方程:[2]

$$b''_{n+1}(t)-pgctg(pgt)b'_{n+1}(t)$$
$$+g^2\sqrt{n+1}\sin^2(pgt)b_{n+1}(t)=0 \quad (8)$$

1.2 Ξ型三能级原子与单模光场作用系统

类似地,在旋波近似下系统的共振相互作用哈密顿量可表示为:

$$V^I=g\sin(p^*\pi vt/L)(aS_{01}+a^+S_{10}+aS_{12}+a^+S_{21}) \quad (9)$$

其中,v表示原子沿腔轴向运动速度,p*表示长度为L的腔中模场的半波数。不失一般性,取原子速度$v=\varepsilon gL/\pi$,且令$p=\varepsilon p^*$,因此p值由原子速度v和场模结构参数p*共同决定。

设原子在初始(t=0)处于基态|0>,则系统处于

$$|\psi(0)\rangle=\sum_{n=0}^{M}C_n|n,0\rangle \quad (10)$$

取基矢为$|n+2,0\rangle$、$|n+1,1\rangle$、$|n,2\rangle$,则t时刻系统的态矢可设为:

$$|\psi(t)\rangle=\sum_n\{a_{n+2}(t)|n+2,0\rangle+b_{n+1}(t)|n+1,1\rangle+c_n(t)|n,2\rangle\} \quad (11)$$

把(11)式代入相互作用绘景下系统的Schrödinger 方程$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle=V^I|\psi(t)\rangle$中,得到:

$$\begin{cases}i\frac{d}{dt}a_{n+2}(t)=\sqrt{n+2}\sin(pgt)b_{n+1}(t)\\ i\frac{d}{dt}b_{n+1}(t)=(\sqrt{n+2}a_{n+2}(t)+\sqrt{n+1}c_n(t))\sin(pgt)\\ i\frac{d}{dt}c_n(t)=\sqrt{n+1}\sin(pgt)b_{n+1}(t)\end{cases} \quad (12)$$

简化后可得到如下形式的二阶变系数微分方程:

$$b''_{n+1}(t)-pgCtg(pgt)b'_{n+1}(t)$$
$$+(2n-1)g^2\sin^2(pgt)b_{n+1}(t)=0 \quad (13)$$

1.3 V 型三能级原子与双模光场作用系统

在旋波近似下系统的共振相互作用哈密顿量改写为:

$$V^I=g_1\sin(p^*\pi vt/L)(a_1c_b^+c_a+a_1^+c_a^+c_b)$$
$$+g_2\sin(p^*\pi vt/L)(a_2c_c^+c_a+a_2^+c_a^+c_c) \quad (14)$$

其中,v表示原子沿腔轴向运动速度,p* 表示长度为L的腔中模场的半波数。不失一般性,取原子速度$v=\varepsilon gL/\pi$,g是与耦合作用有关的常数,且令$p=\varepsilon p^*$,因此p值由原子速度v和场模结构参数p*共同决定。

在相互作用绘景下,设任意时刻系统的态矢为

$$|\Psi_I(t)\rangle=\sum_{n_1,n_2=1}[a_{n_1,n_2}(t)|a,n_1,n_2\rangle+b_{n_1-1,n_2}(t)|b,n_1-1,n_2\rangle$$
$$+c_{n_1,n_2-1}(t)|c,n_1,n_2-1\rangle \quad (15)$$

式中$|a,n_1,n_2\rangle$,$|b,n_1-1,n_2\rangle$和$|c,n_1,n_2-1\rangle$分别是光和原子相互作用系统可能出现的 3 种状态,如果系统初始态为$|a,n_1,n_2\rangle$,与光模 1 相互作用得出$|b,n_1-1,n_2\rangle$ 态,与光模 2 相互作用得出$|c,n_1,n_2-1\rangle$态。并设初始时刻(t=0),原子处于如下的相干叠加态:

$$|\Psi_A(0)\rangle=\cos\theta|a\rangle+\sin\theta e^{-i\varphi}|c\rangle \quad (16)$$

光场处于任意态:

$$|\Psi_F(0)\rangle=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}F_{n_1,n_2}|n_1,n_2\rangle \quad (17)$$

根据相互作用绘景下态矢运动方程:

$$\begin{cases}i\frac{d}{dt}a_{n_1,n_2}(t)=g_1\sqrt{n_1}\sin(pgt)b_{n_1-1,n_2}(t)\\ i\frac{d}{dt}b_{n_1-1,n_2}(t)=g_1\sqrt{n_1}\sin(pgt)a_{n_1,n_2}(t)\\ \qquad +g_2\sqrt{n_2}\sin(pgt)c_{n_1,n_2-1}(t)\\ i\frac{d}{dt}c_{n_1,n_2-1}(t)=g_2\sqrt{n_2}\sin(pgt)b_{n_1-1,n_2}(t)\end{cases} \quad (18)$$

简化后可得到$b_{n_1-1,n_2}(t)$关于如下形式的二阶变系数微分方程:

$$b''_{n_1-1,n_2}(t)-pgctg(pgt)b'_{n_1-1,n_2}(t)$$
$$+\frac{g_1^2n_1+g_2^2n_2}{g_2\sqrt{n_2}}\sin^2(pgt)b_{n_1-1,n_2}(t)=0 \quad (19)$$

2 方程的转化

经过比较发现上述 3 个方程均具有同一个形式,即

$$b''(t)-p(t)b'(t)+kq^2(t)b(t)=0 \quad (20)$$

而且都满足

$$\frac{q'(t)+p(t)q(t)}{q^2(t)}=0 \quad (21)$$

这样设一个中间变量,令

$$x=\int q(t)dt \quad (22)$$

使得

$$b(t)=y(x) \tag{23}$$

上述 3 个方程变成了统一形式的二阶齐次线性常微分方程:[3]

$$\frac{d^2y(x)}{d^2x}+Cy(x)=0 \tag{24}$$

代入初始条件(3)、(4)可解得方程组(7)的解为:

$$\begin{cases} a_n(t)=(C_n\cos\frac{\gamma}{2}\cos\Delta_n(t)-C_n\sin\frac{\gamma}{2}\sin\varphi\sin\Delta_n(t)) \\ \quad +iC_n\sin\frac{\gamma}{2}\cos\varphi\sin\Delta_n(t) \\ b_{n+1}(t)=C_n\sin\frac{\gamma}{2}\cos\varphi\cos\Delta_n(t)+i(C_n\cos\frac{\gamma}{2}\sin\Delta_n(t) \\ \quad -C_n\sin\frac{\gamma}{2}\sin\varphi\cos\Delta_n(t)) \end{cases}$$

其中 $\Delta_n(t)=\frac{\sqrt{n+1}}{p}\cos pgt-\frac{\sqrt{n+1}}{p}$。

代入初始条件(10)可解得方程组(12)的解为:

$$\begin{cases} a_{n+2}(t)=\frac{n+2}{2n+3}C_n\cos[\frac{\sqrt{2n+3}}{p}-\frac{\sqrt{2n+3}}{p}\cos(pgt)] \\ \quad +\frac{n+1}{2n+3}C_n \\ b_{n+1}(t)=-i\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+3}}C_n\sin[\frac{\sqrt{2n+3}}{p}-\frac{\sqrt{2n+3}}{p}\cos(pgt)] \\ c_n(t)=\frac{\sqrt{(n+1)\quad(n+2)}}{2n+3} \\ \quad C_n(\cos[\frac{\sqrt{2n+3}}{p}-\frac{\sqrt{2n+3}}{p}\cos(pgt)]-1) \end{cases}$$

代入初始条件(16)、(17)可解得方程组(18)的解为:

$$\begin{cases} a_{n_1,n_2}(t)=\frac{g_1\sqrt{n_1}}{g_2\sqrt{n_2}}\left[\frac{g_1\sqrt{n_1}}{k}F_{n_1,n_2}\cos\theta+(1-\frac{g_1^2n_1}{kg_2\sqrt{n_2}})F_{n_1,n_2-1}\sin\theta e^{-i\varphi}\right] \\ \cos[\frac{\sqrt{k}}{pg}(1-\cos(pgt))]+(1-\frac{g_1^2n_1}{kg_2\sqrt{n_2}})[F_{n_1,n_2}\cos\theta-\frac{g_1\sqrt{n_1}}{g_2\sqrt{n_2}}F_{n_1,n_2-1}\sin\theta e^{-i\varphi}] \\ b_{n_1-1,n_2}(t)=-i[\frac{g_1\sqrt{n_1}}{k}F_{n_1,n_2}\cos\theta+(1-\frac{g_1^2n_1}{kg_2\sqrt{n_2}})F_{n_1,n_2-1}\sin\theta e^{-i\varphi}] \\ \quad \sin[\frac{\sqrt{k}}{pg}(1-\cos(pgt))] \\ c_{n_1,n_2-1}(t)=\left[\frac{g_1\sqrt{n_1}}{k}F_{n_1,n_2}\cos\theta+(1-\frac{g_1^2n_1}{kg_2\sqrt{n_2}})F_{n_1,n_2-1}\sin\theta e^{-i\varphi}\right] \\ \quad \cos[\frac{\sqrt{k}}{pg}(1-\cos(pgt))] \\ \quad -\frac{g_1\sqrt{n_1}}{k}[F_{n_1,n_2}\cos\theta-\frac{g_1\sqrt{n_1}}{g_2\sqrt{n_2}}F_{n_1,n_2-1}\sin\theta e^{-i\varphi}] \end{cases}$$

3 结 论

以上 3 种形式的变系数微分方程通过分析发现系数间满足一定的关系,因此可以化简为一般常系数微分方程,这种方法在量子力学和量子光学常常会应用。得到系统的态矢,其量子性质就完全能揭示出来。

参考文献:

[1]彭金生,李高翔.近代量子光学导论[M].北京:科学出版社,1996:198-205.

[2]同济大学数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社,1996:376-394.

[3]崔宁,李军红.变系数微分方程的常系数化方法研究[J].河北建筑工程学院学报,2007,25(2):118-119.

责任编辑:胡德明

A Solution for a Class of Schrdinger Equations

Wang Xiancai

(Department of Physics, Chizhou College, Chizhou247000, China)

Abstract: Both Schrdinger equations for atoms in motion and optical field are variable coefficient differential equations. However, handled properly, Schrdinger equations for atoms in motion and optical field interacting can be changed into ordinary differential equations and their exact solutions can be gained.

Key words: quantum optics; Schrdinger equation; variable coefficient differential equation; ordinary differential equation

一种类型的薛定谔方程求解

作者：　　　　　　　　汪贤才， Wang Xiancai
作者单位：　　　　　　池州学院,物理系,安徽,池州,247000
刊名：　　　　　　　　黄山学院学报
英文刊名：　　　　　　JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)：　　　　　2010，12(3)

参考文献(3条)

1. 彭金生.李高翔 近代量子光学导论 1996

2. 同济大学数学教研室 高等数学 1996

3. 崔宁.李军红 变系数微分方程的常系数化方法研究 2007(2)

相似文献(10条)

反聚束效应 -高能物理与核物理2007,31(4)

建立了q形变光场与级联型三能级原子相互作用的非线性理论,求得相互作用绘景中薛定谔方程的形式解及在其态下的期望值,利用数值计算揭示了q形变对场与三能级原子相互作用中场反聚束效应的影响.研究发现q偏离1的程度越大,q形变对场反聚束效应的调控能力越强,反映出q形变的非线性行为对量子相干性的干扰以及对量子特性的影响.当q→1时,恢复为普通线性理论.

9.期刊论文 方曙东.曹卓良.Fang Shudong.Cao Zhuoliang 三能级原子与奇偶纠缠相干光作用的光场压缩 -光学学报2005,25(12)

采用求解薛定谔方程和数值计算方法,研究了V型三能级原子与双模奇偶纠缠相干光场相互作用过程中的光场压缩效应,讨论了压缩效应与双模奇偶纠缠相干光场的纠缠程度、系统失谐量、双模光场的平均光子数和原子基态概率幅的依赖关系.结果表明:光场压缩效应与双模奇偶纠缠相干光场的纠缠程度、失谐量、平均光子数和原子初态相关联:双模纠缠相干光场处于非纠缠状态时的光场压缩量比光场处于纠缠状态时要大;原子处在单纯的基态或激发态时光场都有明显的压缩现象出现;而原子初态中基态和激发态的概率幅较接近时无光场压缩现象;无论光场是否处于纠缠态,只有两模平均光子数接近时,光场才会出现压缩效应.

10.期刊论文 郑森林.林强.Zheng Senlin.Lin Qiang 分析原子干涉仪的矩阵方法 -光学学报2005,25(6)

从原子波包所满足的薛定谔方程出发,从理论上巧妙地推导出了原子干涉仪在重力的影响下所产生的相位差与重力加速度的关系表达式.提出了一种3×3阶的矩阵方法,以此来分析多个元件情况下原子干涉仪中的相位差,可以大大简化计算.利用这种方法不但能得到原子束在重力的影响下在自由空间中的传输矩阵,也可以得到原子束与π/2和π脉冲的相互作用矩阵.作为例子,用3×3阶矩阵方法计算了三脉冲原子干涉仪中的相位差,得出的结果与Wolf等对经典轨迹进行拉格朗日积分所得出的结果完全相符.进一步分析了五脉冲的原子干涉仪中的相位差,以说明3×3阶矩阵方法的简便性.