第 12 卷第 3 期
2010 年 6 月

黄山学院学报
Journal of Huangshan University

Vol.12,NO.3
Jun.2010

对于开映射的研究

霍承刚

(宿州学院 应用数学系,安徽 宿州 234000)

摘　要:开映射在拓扑空间的研究中有着十分重要的作用,文章介绍并证明了与之有关的性质定理。

关键词:开映射;连续映射;同胚;商拓扑

中图分类号:O189　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-447X(2010)03-0010-02

定义 1:[1]设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 称为一个开映射,如果对于 X 中的任何一个开集 U,像集 $f(U)$ 是 Y 中的一个开集。

例:设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geq1$ 个拓扑空间 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 的积空间,则对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,笛卡尔积 X 到它的第 i 个坐标集 X_i 的投射 $P_i:X\to X_i$ 是一个满的连续开映射。

定理 1:设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 为同胚,则映射 $f:X\to Y$ 为一个开映射。

证明:设 U 是 X 的任意开集。由于映射 $f:X\to Y$ 为同胚,则 $f^{-1}:Y\to X$ 也是同胚,因而 $f^{-1}:Y\to X$ 是连续映射。对 X 的任意开集 U,有 $(f^{-1})^{-1}(U))=f(U)$ 为 Y 中的开集,从而 $f^{-1}:Y\to X$ 为一个开映射。

定理 2:设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 为一一映射,若 f 为连续的开映射,则 $f:X\to Y$ 为同胚。

证明:欲证明 $f:X\to Y$ 为同胚,由已知条件,只需证明 $f^{-1}:Y\to X$ 连续即可。对 X 中的任意开集 U 有 $(f^{-1})^{-1}(U))=f(U)$。由于 f 为开映射,故 $f(U)$ 为 Y 中的开集,从而说明 $f^{-1}:Y\to X$ 连续。

这样由定理 1 和定理 2 我们即有如下的结论:X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 为同胚的充要条件是 f 为一一的连续开映射。

下面给出开映射的一个重要性质。

定理 3:设 X,Y 和 Z 是拓扑空间,映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都为开映射,则 $g\circ f:X\to Z$ 也为开映射。

证明:设 W 为 Z 中的任意开集,由 $f:X\to Y$ 为开映射有 $f(U)$ 为 Y 中的开集,再由 $g:Y\to Z$ 为开映射得 $g(f(U))$ 为 Z 中的开集。而 $g\circ f(U)=g(f(U))$,所以 $g\circ f(U)$ 为 Z 中的开集,这就证明了为 $g\circ f:X\to Z$ 开映射。

定义 2:[2]一个拓扑空间如果有一个可数基(在它的每一点处有一个可数邻域基)则称这个拓扑空间是满足第二可数性公理的空间(满足第一可数性公理的空间)。

引理 1: 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 是一个满的连续开映射。如果 X 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理),则 Y 也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)。

定理 4:设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geq1$ 个拓扑空间 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 的积空间。如果 X 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理),则 $X_i(i=1,2,\cdots,\ n)$ 也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)。

证明: 考虑积空间 X 到 i 第个坐标空间的自然投射 $P_i:X\to X_i$ $(i=1,2,\cdots,\ n)$。由于 $P_i:X\to X_i$ 是一个满的连续开映射(其中 $i=1,2,\cdots,\ n$),再结合引理 1,定理结论成立。

定义 3:[3]设 (X,T) 是一个拓扑空间,Y 是一个集

收稿日期:2009-12-04
基金项目:宿州学院硕士科研启动基金资助(2008yss18)
作者简介:霍承刚(1980-),山东德州人,宿州学院应用数学系讲师,硕士,研究方向为低维拓扑。

合，$f:X\to Y$是一个满射。Y的拓扑

$$T_1=\{U\subset Y\mid f^{-1}(U)\in T\}$$

称为Y的相对于f满射而言的商拓扑。

引理 2：[4] 设X和Y是两个拓扑空间，$f:X\to Y$是一个满的连续开映射（闭映射），则Y的拓扑是相对于满射f而言的商拓扑。

定理 5：[5]设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$是$n\geq 1$个拓扑空间$X_1$，$X_2,\cdots$，$X_n$的积空间，$P_i:X\to X_i$为$X$到它的第$i$个坐标空间$X_i$的自然投射，则$X_i$的拓扑是相对于满射$P_i$而言的商拓扑，其中$i=1,2,\cdots$，$n$。

证明：由引理 2 定理结论自然成立。

参考文献：

[1]熊金城.点集拓扑讲义[M].北京：高等教育出版社，1998：55-144.

[2]李元熹，张国梁.拓扑学[M].上海：上海科学技术出版社，1986：60-65.

[3]M.A.Armstrong. 基础拓扑学 [M]. 北京：北京大学出版社，1983：35-70.

[4]杨鼎文.代数拓扑基础[M].北京：科学出版社，1992：45-50.

[5]王则柯，凌志英.拓扑理论及其应用[M].北京：国防工业出版社，1991：32-45.

责任编辑：胡德明

A Research into Open Mapping

Huo Chenggang

(Department of Applied Mathematics, Suzhou University, Suzhou234000, China)

Abstract: Open mapping plays a very important role in the study of topological space. In this paper, some theorems about open mapping are introduced and testified.

Key words: Open mapping; Continuous mapping; Homeomorphism; Quotient topology

对于开映射的研究

作者： 霍承刚， Huo Chenggang
作者单位： 宿州学院,应用数学系,安徽,宿州,234000
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2010，12(3)
被引用次数： 0次

参考文献(5条)

1. 熊金城 点集拓扑讲义 1998

2. 李元熹.张国梁 拓扑学 1986

3. M.A.Armstrong 基础拓扑学 1983

4. 杨鼎文 代数拓扑基础 1992

5. 王则柯.凌志英 拓扑理论及其应用 1991

相似文献(10条)

，给出了它的等价刻画以及它和连续映射之间的联系．最后研究了开映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射，闭映射之间的联系．

三、研究了ψ〈'*〉-空间之间的连续映射，闭映射以及开映射．首先定义了连续映射，给出了连续映射的等价刻画，以及粘合定理，同胚映射．其次研究了闭映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射之间的联系．最后研究了开映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射，闭映射之间的联系．

四、介绍了ψ〈'*〉-空间的连通性和分离性．首先给出了ψ〈'*〉-空间中连通子集的定义及其等价刻画．其次定义了连通分支的概念并讨论了它的一些性质．最后定义了T〈,0〉，T〈,1〉，T〈,2〉，给出了Fréchet余拓扑是T〈,0〉的，在T〈,2〉条件下Fréchet 余拓扑是通常余拓扑．

五、在L〈'X〉上引入了极限算子．首先定义了模糊集合上的ψ〈'*〉-空间及L〈'*〉-空间，由ψ〈'*〉-空间中的极限算子可以导出L〈'X〉上的一个闭包算子，从而得到了X上的一个Fréchet L-余拓扑；随后定义了X上的序列式L-余拓扑，讨论了FréchetL-余拓扑与序列式L-余拓扑的关系，得到了序列式L-余拓扑成为Fréchet L-余拓扑的一个充分必要条件．其次研究了其它算子和有关性质，以及它们和闭包算子的关系．再次在所有模糊极限算子所构成的集合上定义了偏序关系，定义了模糊极限算子之间的交和并运算；研究了各种算子全体之间的关系，给出了它们之间的蕴涵关系．对它们之间能够成立的蕴涵关系给出了证明，对于不成立的蕴涵关系分别给出了反例或者备注予以说明．

7. 期刊论文 陈焕然 半分离空间的映射性质 -邵阳学院学报(自然科学版)2004,1(3)

将分离公理推广为半分离公理,讨论了半分离空间在同胚映射、强半开映射、弱半开映射、半开映射和弱连续映射下的有关性质.

8. 期刊论文 张雄伟.赵虎.李生刚.ZHANG Xiong-wei.ZHAO Hu.LI Sheng-gang 弱拓扑分子格 -西北大学学报（自然科学版）2010,40(1)

目的 建立弱拓扑分子格的初步理论.方法 运用一一对应的思想和范畴论方法研究弱余拓扑的确定和弱拓扑分子格的范畴性质.结果 证明了可以用弱闭包算子确定弱余拓扑,WTML(即弱拓扑分子格与保并连续映射的范畴)和TML(即拓扑分子格与保并连续映射的范畴)都是CL(即完备格与保并映射的范畴)上的拓扑范畴.结论 扩展了拓扑分子格理论.

9. 期刊论文 陈园园.路娟.李生刚.CHEN Yuan-yuan.LU Juan.LI Sheng-gang 预拓扑分子格以及它们之间的开映射和闭映射 -纺织高校基础科学学报2005,18(3)

引入了预拓扑分子格的概念(它是拓扑分子格的推广),并证明了完备格上的闭预拓扑和伪闭包算子是一一对应的.另外,定义了两个预拓扑分子格之间的连续映射、开映射、闭映射和同胚映射并证明了若干特征定理.

10. 学位论文 刘士琴 关于B-I-开集及弱开映射的一些结果 2008

本文主要由两部分组成，第一部分在理想拓扑空间中引入了b-I-开集这一新概念，并且利用b-I-开集定义了b-I-连续映射、b-I-紧(b-I-仿紧)空间，进而得到了这些空间的一些特征与性质．第二部分利用弱开映射，建立了g-可度量空间与度量空间之间的关系，得到了对度量空间弱开k-映射的一些等价刻画并证明了度量空间、g-可度量空间、sn-可度量空间、N-空间在弱开、闭映射下保持．

第一部分主要结果有：

结果1（定理2.2）:理想拓扑空间（X，τ，I）中，下列命题成立。

（1）对每个α∈△，若Uα∈BIO（X，τ），则∪{Uα：α∈△}∈BIO（X，τ）。

（2）若A∈BIO（X，τ），U是X中α-I-开集，则A∩U∈BIO（X，τ）。

结果2 （定理2.5）：对于映射f:(X,τ,I)→(Y,σ,J),下列等价:

（1）f是b-I-连续映射。

（2）对任意x∈X,及Y中包含f（x）的b-I-开集V，X中存在包含x的b-I-开集U，使得f(U)∈V。

（3）对任意x∈X，及Y中包含f（x）的b-I-闭集F，X中存在不包含x的b-I-闭集H，使得f-1(F)∈H。

第二部分主要结果有：

结果4(定理3.1)：空间X是g-可度量空间当且仅当它是度量空间的弱开mssc-映像.

结果5(定理3.3)：对于空间X，下列条件等价：

(1)X是度量空间的弱开k-映像.

(2)X是度量空间的1序列覆盖映射商k-映像.

(3)X具有紧有限k-闭覆盖列的弱展开.

(4)X是具有紧有限sn覆盖k-闭集的点星网的序列空间.

结果6(定理3.4)：度量空间、g-可度量空间、sn-可度量空间、ｘ-空间在弱开、闭映射下保持.