

# 对于开映射的研究

霍承刚

(宿州学院 应用数学系,安徽 宿州 234000)

**摘要:**开映射在拓扑空间的研究中有着十分重要的作用,文章介绍并证明了与之有关的性质定理。

**关键词:**开映射;连续映射;同胚;商拓扑

**中图分类号:** O189

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-447X(2010)03-0010-02

定义 1:<sup>[1]</sup>设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,映射  $f: X \rightarrow Y$  称为一个开映射,如果对于  $X$  中的任何一个开集  $U$ ,像集  $f(U)$  是  $Y$  中的一个开集。

例:设  $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$  是  $n \geq 1$  个拓扑空间  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的积空间,则对于每一个  $i = 1, 2, \dots, n$ ,笛卡尔积  $X$  到它的第  $i$  个坐标集  $X_i$  的投影  $P_i: X \rightarrow X_i$  是一个满的连续开映射。

定理 1:设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,映射  $f: X \rightarrow Y$  为同胚,则映射  $f: X \rightarrow Y$  为一个开映射。

证明:设  $U$  是  $X$  的任意开集。由于映射  $f: X \rightarrow Y$  为同胚,则  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  也是同胚,因而  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  是连续映射。对  $X$  的任意开集  $U$ ,有  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$  为  $Y$  中的开集,从而  $f: X \rightarrow Y$  为一个开映射。

定理 2:设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,映射  $f: X \rightarrow Y$  为一一映射,若  $f$  为连续的开映射,则  $f: X \rightarrow Y$  为同胚。

证明:欲证明  $f: X \rightarrow Y$  为同胚,由已知条件,只需证明  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  连续即可。对  $X$  中的任意开集  $U$  有  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ 。由于  $f$  为开映射,故  $f(U)$  为  $Y$  中的开集,从而说明  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  连续。

这样由定理 1 和定理 2 我们即有如下的结论:  
 $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  为同胚的充要条件是  $f$  为一一的连续开映射。

下面给出开映射的一个重要性质。

定理 3:设  $X, Y$  和  $Z$  是拓扑空间,映射  $f: X \rightarrow Y$  和  $g: Y \rightarrow Z$  都为开映射,则  $g \circ f: X \rightarrow Z$  也为开映射。

证明:设  $W$  为  $Z$  中的任意开集,由  $f: X \rightarrow Y$  为开映射有  $f(U)$  为  $Y$  中的开集,再由  $g: Y \rightarrow Z$  为开映射得  $g(f(U))$  为  $Z$  中的开集。而  $g \circ f(U) = g(f(U))$ ,所以  $g \circ f(U)$  为  $Z$  中的开集,这就证明了为  $g \circ f: X \rightarrow Z$  开映射。

定义 2:<sup>[2]</sup>一个拓扑空间如果有一个可数基(在它的每一点处有一个可数邻域基)则称这个拓扑空间是满足第二可数性公理的空间(满足第一可数性公理的空间)。

引理 1: 设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是一个满的连续开映射。如果  $X$  满足第二可数性公理(满足第一可数性公理), 则  $Y$  也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)。

定理 4:设  $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$  是  $n \geq 1$  个拓扑空间  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的积空间。如果  $X$  满足第二可数性公理(满足第一可数性公理), 则  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)。

证明: 考虑积空间  $X$  到第  $i$  个坐标空间的自然投影  $P_i: X \rightarrow X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。由于  $P_i: X \rightarrow X_i$  是一个满的连续开映射(其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ), 再结合引理 1, 定理结论成立。

定义 3:<sup>[3]</sup>设  $(X, \mathcal{T})$  是一个拓扑空间,  $Y$  是一个集

收稿日期: 2009-12-04

基金项目: 宿州学院硕士科研启动基金资助(2008yys18)

作者简介: 霍承刚(1980-), 山东德州人, 宿州学院应用数学系讲师, 硕士, 研究方向为低维拓扑。

合  $f: X \rightarrow Y$  是一个满射。 $Y$  的拓扑

$$T_1 = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \in T\}$$

称为  $Y$  的相对于  $f$  满射而言的商拓扑。

引理 2:<sup>[4]</sup> 设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是一个满的连续开映射(闭映射), 则  $Y$  的拓扑是相对于满射  $f$  而言的商拓扑。

定理 5:<sup>[5]</sup> 设  $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$  是  $n \geq 1$  个拓扑空间  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的积空间,  $P_i: X \rightarrow X_i$  为  $X$  到它的第  $i$  个坐标空间  $X_i$  的自然投射, 则  $X_i$  的拓扑是相对于满射  $P_i$  而言的商拓扑, 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

证明: 由引理 2 定理结论自然成立。

参考文献:

- [1] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 55-144.
- [2] 李元薰, 张国梁. 拓扑学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1986: 60-65.
- [3] M.A. Armstrong. 基础拓扑学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1983: 35-70.
- [4] 杨鼎文. 代数拓扑基础[M]. 北京: 科学出版社, 1992: 45-50.
- [5] 王则柯, 凌志英. 拓扑理论及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991: 32-45.

责任编辑: 胡德明

## A Research into Open Mapping

Huo Chenggang

(Department of Applied Mathematics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

**Abstract:** Open mapping plays a very important role in the study of topological space. In this paper, some theorems about open mapping are introduced and testified.

**Key words:** Open mapping; Continuous mapping; Homeomorphism; Quotient topology

# 对于开映射的研究

作者: [霍承刚](#), [Huo Chenggang](#)  
 工作单位: [宿州学院, 应用数学系, 安徽, 宿州, 234000](#)  
 刊名: [黄山学院学报](#)  
 英文刊名: [JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY](#)  
 年, 卷(期): 2010, 12(3)  
 被引用次数: 0次

## 参考文献(5条)

1. [熊金城](#) [点集拓扑讲义](#) 1998
2. [李元熹](#), [张国梁](#) [拓扑学](#) 1986
3. [M. A. Armstrong](#) [基础拓扑学](#) 1983
4. [杨鼎文](#) [代数拓扑基础](#) 1992
5. [王则柯](#), [凌志英](#) [拓扑理论及其应用](#) 1991

## 相似文献(10条)

1. 期刊论文 [张兴芳](#), [孟广武](#), [Zhang Xingfang](#), [Meng Guangwu](#) [模糊连续映射和开映射的新特征](#) [纯粹数学与应用数学](#)1999, 15(1)

给定模糊格 $L$ 及 $LF$ 拓扑空间 $(L, \tau)$ , 对 $L$ 的素元 $r$ 及分子 $a$ , 在 $(L, \tau)$ 中, 引入了 $r$ -开集及 $a$ -闭集的概念. 证明了所有的 $r$ -开集 $O(r)$ 和 $a$ -闭集 $C(a)$ 分别形成一个 $LF$ 拓扑和 $LF$ 余拓扑, 借助于它俩得到了 $LF$ 连续映射和 $LF$ 开映射的若干新特征.

2. 期刊论文 [陈焕然](#) [T<sub>2</sub>、S-T<sub>2</sub>、正则与正规空间的映射性质](#) [常德师范学院学报](#)2002, 14(4)

根据 $S$ 连续映射、\*半连续映射、半开映射、半连续映射和弱连续映射的定义和点集拓扑的有关知识, 讨论了 $T_2$ 、 $S-T_2$ 、正则和正规空间在上述映射下的性质, 得到了这些空间在相关映射下是映射或逆向映射不变的结论.

3. 学位论文 [陈园园](#) [L-区间值模糊滤子空间及其范畴L-IVF](#) 2006

模糊集的取值不限于 $[0, 1]$ 中的数, 也可以取区间数. 因此区间值模糊集也被定义和研究, 这种特殊的模糊集引起了模糊学者的兴趣, 并被用于基础理论研究及模糊控制、模糊信息分析等应用领域. 本文首先就有中间元的完备DeMorgan代数 $L$ 引入了 $L$ -区间值模糊集的概念(它是区间值模糊集的推广). 其次, 在此基础上定义了 $L$ -区间值模糊滤子空间, 着重研究了它的拓扑性质; 引入并系统研究了 $L$ -区间值模糊滤子空间之间的基本映射(如连续映射、开映射以及同胚映射等). 此外, 我们定义了Hausdorff $L$ -区间值模糊滤子空间, 研究了这种Hausdorff分离性是否可乘. 最后, 研究了 $L$ -区间值模糊滤子空间范畴 $L-IVF$ 和Hausdorff $L$ -区间值模糊滤子空间范畴 $L-IVFHaus$ 的性质. 通过对范畴 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 中的等子、余等子、乘积、余乘积的存在性及构造的研究, 证明了 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 都不是完备范畴, 而 $L-IVF$ 是余完备范畴. 同时也证明了 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 都不是弱拓扑范畴, 范畴 $L-IVF$ 既存在弱拓扑满子范畴又存在非弱拓扑满子范畴.

下面介绍本文的结构和主要内容: 第一章预备知识. 为了便于以后的讨论, 本章给出了与 $L$ -区间值模糊集有关的格论、模糊集和范畴理论的基本概念和结论.

第二章 $L$ -区间值模糊滤子空间. 首先基于 $L$ -区间值模糊集的概念定义并研究了 $L$ -区间值模糊滤子空间以及产生新的 $L$ -区间值模糊滤子空间的方法. 其次, 引入并系统研究了 $L$ -区间值模糊滤子空间之间的基本映射(如连续映射、开映射以及同胚映射等), 给出了它们的特征刻画定理. 第三, 定义了乘积 $L$ -区间值模糊滤子空间, 给出了一族 $L$ -区间值模糊滤子的积滤子的特征定理. 最后, 定义了 $L$ -区间值模糊滤子空间的Hausdorff分离性, 并且构造了其中序列的 $L$ -区间值模糊滤子极限, 得到了 $L$ -区间值模糊滤子空间中的序列若按 $L$ -区间值模糊滤子收敛则极限唯一以及Hausdorff分离性是任意可乘的等一系列较好的结论.

第三章 $L$ -区间值模糊滤子空间范畴 $L-IVF$ . 较为系统地研究了范畴 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 中的等子、余等子、乘积、余乘积的存在性及构造, 证明了 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 都不是完备范畴, 而 $L-IVF$ 是余完备范畴. 最后, 也证明了 $L-IVF$ 和 $L-IVFHaus$ 都不是弱拓扑范畴, 范畴 $L-IVF$ 既存在弱拓扑满子范畴又存在非弱拓扑满子范畴.

4. 期刊论文 [孟喆](#), [周相泉](#) [格值模糊半开集与半连续映射](#) [曲阜师范大学学报\(自然科学版\)](#)2004, 30(4)

在 $L$ -fuzzy拓扑空间中, 给出一种新的半开集的概念, 证明了这种半开集具有分明半开集的几乎所有的性质, 并利用这种半开集研究了 $L$ -fuzzy半连续映射、半开映射、半闭映射等.

5. 期刊论文 [李容录](#), [钟书慧](#), [LI Rong-lu](#), [ZHONG Shu-hui](#) [开映射与人类视觉](#) [黑龙江大学自然科学学报](#)2010, 27(2)

对距离线性空间之间的映射可选定三个条件(01)、(02)与(03), 它们均与映射是不是线性的无关, 也与映射有无连续点无关. 利用此三条给出了第一个既不要求映射线性也不要求映射有连续点的开映射定理: 距离线性空间之间的映射若满足条件(01)、(02)与(03), 则它是开映射. 本定理的诸多推论中包括一些重要事实: 如描述视觉的目视映射是非线性的开映射, 距离线性空间之间的线性算子是开映射当且仅当它满足条件(01)与(03).

6. 学位论文 [李静](#) [极限算子与模糊余拓扑](#) 2007

极限算子是一般拓扑学与模糊拓扑学中一个非常重要的概念, 本文从一个集合上的极限算子出发来确定余拓扑与 $L$ -余拓扑, 从而由极限算子诱导出两种空间:  $\Psi<*$ -空间和 $L<*$ -空间. 并在这两种空间上定义了闭包算子, 内部算子, 边界算子, 导算子等概念, 讨论了它们之间的关系. 然后定义了 $\Psi<*$ -空间的子空间, 有限积空间, 连通 $\Psi<*$ -空间等概念. 定义了 $\Psi<*$ -空间之间的连续映射, 开映射和闭映射, 讨论了它们的一些性质并给出了一些等价刻画.

本文的要点和主要内容如下:

一、首先介绍极限算子的定义, 研究了怎样用极限算子确定Fréchet余拓扑,  $L<*$ -空间和 $\Psi<*$ -空间. 然后在 $\Psi<*$ -空间中引入了其他几种算子(内部算子, 导算子, 边界算子), 并讨论了它们的性质. 在某集合的全体极限算子所构成的集合上定义了偏序关系, 并证明了全体极限算子所构成的集合带上所定义的偏序关系后能够构成一个交半格.

二、研究了 $\Psi<*$ -空间的子空间和有限乘积空间. 首先定义了某集合上的极限算子在其子集合上的限制, 得到了子 $\Psi<*$ -空间的定义以及它的一些性质. 其次研究了有限乘积 $\Psi<*$ -空间的定义, 积空间中的Fréchet余拓扑, 闭集, 开集还有边界算子等和因子空间中相应概念之间的关系. 研究了 $\Psi<*$ -空间之间的连续映射, 闭映射以及开映射. 首先定义了连续映射, 给出了连续映射的等价刻画, 以及粘合定理, 同胚映射. 其次研究了闭映射

，给出了它的等价刻画以及它和连续映射之间的联系。最后研究了开映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射，闭映射之间的联系。

三、研究了  $\psi\langle * \rangle$ -空间之间的连续映射，闭映射以及开映射。首先定义了连续映射，给出了连续映射的等价刻画，以及粘合定理，同胚映射。其次研究了闭映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射之间的联系。最后研究了开映射，给出了它的等价刻画以及它和连续映射，闭映射之间的联系。

四、介绍了  $\psi\langle * \rangle$ -空间的连通性和分离性。首先给出了  $\psi\langle * \rangle$ -空间中连通子集的定义及其等价刻画。其次定义了连通分支的概念并讨论了它的一些性质。最后定义了  $T\langle 0 \rangle$ ,  $T\langle 1 \rangle$ ,  $T\langle 2 \rangle$ ，给出了Fréchet余拓扑是  $T\langle 0 \rangle$ 的，在  $T\langle 2 \rangle$ 条件下Fréchet余拓扑是通常余拓扑。

五、在  $L\langle X \rangle$ 上引入了极限算子。首先定义了模糊集合上的  $\psi\langle * \rangle$ -空间及  $L\langle * \rangle$ -空间，由  $\psi\langle * \rangle$ -空间中的极限算子可以导出  $L\langle X \rangle$ 上的一个闭包算子，从而得到了  $X$ 上的一个Fréchet  $L$ -余拓扑；随后定义了  $X$ 上的序列式  $L$ -余拓扑，讨论了Fréchet  $L$ -余拓扑与序列式  $L$ -余拓扑的关系，得到了序列式  $L$ -余拓扑成为Fréchet  $L$ -余拓扑的一个充分必要条件。其次研究了其它算子和有关性质，以及它们和闭包算子的关系。再次在所有模糊极限算子所构成的集合上定义了偏序关系，定义了模糊极限算子之间的交和并运算；研究了各种算子全体之间的关系，给出了它们之间的蕴涵关系。对它们之间能够成立的蕴涵关系给出了证明，对于不成立的蕴涵关系分别给出了反例或者备注予以说明。

#### 7. 期刊论文 陈焕然 半分离空间的映射性质 -邵阳学院学报(自然科学版)2004, 1(3)

将分离公理推广为半分离公理,讨论了半分离空间在同胚映射、强半开映射、弱半开映射、半开映射和弱连续映射下的有关性质。

#### 8. 期刊论文 张雄伟,赵虎,李生刚,ZHANG Xiong-wei,ZHAO Hu,LI Sheng-gang 弱拓扑分子格 -西北大学学报(自然科学版)2010, 40(1)

目的 建立弱拓扑分子格的初步理论.方法 运用一一对应的思想和范畴论方法研究弱余拓扑的确定和弱拓扑分子格的范畴性质.结果 证明了可以用弱闭包算子确定弱余拓扑,WTML(即弱拓扑分子格与保并连续映射的范畴)和TML(即拓扑分子格与保并连续映射的范畴)都是CL(即完备格与保并映射的范畴)上的拓扑范畴.结论 扩展了拓扑分子格理论.

#### 9. 期刊论文 陈园园,路娟,李生刚,CHEN Yuan-yuan,LU Juan,LI Sheng-gang 预拓扑分子格以及它们之间的开映射和闭映射 -纺织高校基础科学学报2005, 18(3)

引入了预拓扑分子格的概念(它是拓扑分子格的推广),并证明了完备格上的闭预拓扑和伪闭包算子是——对应的.另外,定义了两个预拓扑分子格之间的连续映射、开映射、闭映射和同胚映射并证明了若干特征定理.

#### 10. 学位论文 刘士琴 关于B-I-开集及弱开映射的一些结果 2008

本文主要由两部分组成,第一部分在理想拓扑空间中引入了b-I-开集这一新概念,并且利用b-I-开集定义了b-I-连续映射、b-I-紧(b-I-仿紧)空间,进而得到了这些空间的一些特征与性质.第二部分利用弱开映射,建立了g-可度量空间与度量空间之间的关系,得到了对度量空间弱开k-映射的一些等价刻画并证明了度量空间、g-可度量空间、sn-可度量空间、N-空间在弱开、闭映射下保持.

第一部分主要结果有:

结果1(定理2.2):理想拓扑空间  $(X, \tau, I)$  中,下列命题成立.

(1) 对每个  $\alpha \in \Delta$ , 若  $U \in \text{BIO}(X, \tau)$ , 则  $\cup \{U \alpha : \alpha \in \Delta\} \in \text{BIO}(X, \tau)$ .

(2) 若  $A \in \text{BIO}(X, \tau)$ ,  $U$  是  $X$  中  $\alpha$ -I-开集, 则  $A \cap U \in \text{BIO}(X, \tau)$ .

结果2(定理2.5): 对于映射  $f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ , 下列等价:

(1)  $f$  是 b-I-连续映射.

(2) 对任意  $x \in X$ , 及  $Y$  中包含  $f(x)$  的 b-I-开集  $V$ ,  $X$  中存在包含  $x$  的 b-I-开集  $U$ , 使得  $f(U) \in V$ .

(3) 对任意  $x \in X$ , 及  $Y$  中包含  $f(x)$  的 b-I-闭集  $F$ ,  $X$  中存在不包含  $x$  的 b-I-闭集  $H$ , 使得  $f^{-1}(F) \in H$ .

第二部分主要结果有:

结果4(定理3.1): 空间  $X$  是 g-可度量空间当且仅当它是度量空间的弱开 mssc-映像.

结果5(定理3.3): 对于空间  $X$ , 下列条件等价:

(1)  $X$  是度量空间的弱开 k-映像.

(2)  $X$  是度量空间的 1 序列覆盖映射商 k-映像.

(3)  $X$  具有紧有限 k-闭覆盖列的弱展开.

(4)  $X$  是具有紧有限 sn 覆盖 k-闭集的点星网的序列空间.

结果6(定理3.4): 度量空间、g-可度量空间、sn-可度量空间、 $x$ -空间在弱开、闭映射下保持.

本文链接: [http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_hsxyxb201003004.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_hsxyxb201003004.aspx)

授权使用: 黄山学院学报(qkhsxy), 授权号: ea2ba0ba-4e46-4622-be58-9eb90115c57d

下载时间: 2011年4月2日