

一类 Lotka-Volterra 型系统的 ω 周期解

丁文国¹,张孝娥²

(1.黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041; 2.朔州市聋哑学校,山西 朔州 038300)

摘 要:利用锥上不动点定理,研究了一类 Lotka-Volterra 型系统的 ω 周期解的存在性。

关键词:锥;不动点;周期解

中图分类号:O175.1 文献标识码:A 文章编号:1672-447X(2010)03-0008-02

1 引言

对于多元非自治系统 Lotka-Volterra 型模型

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_i(t)) - f_i(t - \tau, x_i(t - \tau)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中 $t \in \mathbb{R}, x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, 对于 $i = 1, 2, \dots, n, f_i(t, 0) \equiv 0, \tau > 0, f_i(t + \omega, x(t)) \equiv f_i(t, x(t))$ 。一般是没有初等解法的,但在某些条件的约束下,利用巧妙的数学变形和锥的不动点定理,却能得到解的良好性质。

2 准备工作

定义 1:^[1]设 E 是实 Banach 空间,如果 P 是 E 中某非空凸闭集,并且满足下面两个条件:

(i) $x \in P, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$

(ii) $x \in P, -x \in P \Rightarrow x = \theta, \theta$ 表示 E 中零元素

则称 P 是 E 中的一个锥。

定义 2:若算子 $A: D \rightarrow E$ 是连续的,且又是紧的,则称 A 是映 D 到 E 的全连续算子。

引理 1(锥拉伸与锥压缩不动点定理):设 Ω_1, Ω_2 是 E 中有界开集 $\theta \in \Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2, A: P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$, 全连续。如果满足条件

(H₁) Ax 不大于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1; Ax$ 不小于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$ (即锥拉伸),

或 (H₂) Ax 不大于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2; Ax$ 不小于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$ (即锥压缩)。

则 A 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必存在不动点。

引理 2:设 Ω_1, Ω_2 是 E 中有界开集 $\theta \in \Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2, A: P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ 全连续。设 $u_0 \in P \setminus \{\theta\}$, 令

$$P_{u_0} = \{x \mid \text{存在 } \lambda > 0, \text{使 } x \geq \lambda u_0\}$$

如果满足条件

(H₃) Ax 不小于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2; Ax$ 不大于等于 $(1 + \varepsilon)x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1, \varepsilon > 0$ (即锥拉伸)

或 (H₄) Ax 不小于等于 $x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1; Ax$ 不大于等于 $(1 + \varepsilon)x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2, \varepsilon > 0$ (即锥压缩), 则, A 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必具有不动点。

3 主要结果

对方程(1), 变换成同解方程

$$x_i(t) = \int_{t-\tau}^t f_i(s, x_i(s)) ds = A_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n^{[2,3]} \quad (2)$$

此方程是某些传染病的数学模型。

关于 $f_i(t, x_i(t))$, 作下面四条假定:

(H1) $f_i(t, x_i(t))$ 连续, 非负, $\forall -\infty < t < +\infty, x_i(t) \geq 0$;

(H2) $f_i(t, 0) = 0$, 对 $\forall -\infty < t < +\infty$, 存在 $\omega > 0$, 使得 $f_i(t + \omega, x) \equiv f_i(t, x), \forall -\infty < t < +\infty, x_i(t) \geq 0$;

(H3) 存在 $R > 0$, 使 $f_i(t, x) \leq \frac{R}{\tau}, \forall 0 \leq t \leq \omega, 0 \leq x \leq R$;

(H4) 对于每个 $t \in (-\infty, +\infty)$, 极限

收稿日期:2010-03-01

基金项目:安徽省教育厅自然科学基金资助(KJ2010B217);安徽省高等学校青年教师科研基金资助(2008jq1036)

作者简介:丁文国(1977-),安徽黄山人,黄山学院数学系讲师,硕士,研究方向为常微分方程及生物数学;

张孝娥(1959-),山西怀仁人,朔州市聋哑学校高级教师。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_i(t, x)}{x} = a_i(t) \quad (3)$$

存在有限,且对于每个 $k \in (0, 1)$, 都存在 $\varepsilon_k > 0$, 使 $f_i(t, x) \geq ka_i(t), \forall -\infty < t < +\infty, 0 \leq x_i(t) \leq \varepsilon_k$ (4)

结论: 设条件(H1)-(H4)满足, 正整数 N 满足

$$\frac{\omega}{N} \leq \frac{\tau}{2}, \text{ 令 } I_j = [\frac{j-1}{N}\omega, \frac{j}{N}\omega], j=1, 2, \dots, N. \text{ 如果 } \prod_{j=1}^N \int_{I_j} a(s) ds > 1 \quad (5)$$

则方程(1)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解。

由条件(H1)-(H4)满足, 对 $\forall -\infty < t < +\infty, a_i(t)$ 是非负的周期为 ω 的有界可测函数, 所以(5)式左端各个积分都存在有限。令

$E_i = \{x_i(t) | x_i(t) \text{ 是 } (-\infty, +\infty) \text{ 上周期为 } \omega \text{ 的连续函数}\}, i=1, 2, \dots, n$ 。

由函数的线性运算, 并作范数

$$\|x_i(t)\| = \sup_{-\infty < t < +\infty} |x_i(t)| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x_i(t)|$$

E_i 成为 Banach 空间。令

$$P_i = \{x_i(t) | x_i(t) \in E, x_i(t) \geq 0, -\infty < t < +\infty\}, i=1, 2, \dots, n$$

由定义 1 知 P_i 是 E_i 中的一个锥, 又因为 A_i 将 P_i 中有界集映为 P_i 中一族函数, 他们在 $0 \leq t \leq \omega$ 上一致有界且等度连续, 由定义 2 可知 $A_i: P_i \rightarrow P_i$ 全连续。

记 $T_R = \{x_i(t) | x_i(t) \in E, \|x_i(t)\| < R\}$,

下面证明

$$Ax(t) \text{ 不大于等于 } (1+\varepsilon)x_i(t), \forall x_i(t) \in P_i \cap \partial T_R, \varepsilon > 0 \quad (6)$$

我们可以使用反证, 若存在 $x_i^0(t) \in P_i \cap \partial T_R$, 及 $\varepsilon^0 > 0$ 使 $Ax_i^0(t) \geq (1+\varepsilon)x_i^0(t)$, 则由(H3)知

$$(1+\varepsilon^0)x_i^0(t) \leq Ax_i^0(t) = \int_{t-\tau}^t f_i(s, x_i^0(s)) ds \leq \int_{t-\tau}^t R ds = R$$

从而 $(1+\varepsilon^0)\|x_i^0(t)\| \leq R$, 即 $(1+\varepsilon^0)R \leq R$, 这就得到了矛盾, 所以得证。

令 $u_0(t) \equiv 1$, 则 $P_{u_0} = \{x_i(t) | x_i(t) \in E, x_i(t) > 0, \forall -\infty < t < +\infty\}$ 。取 $0 < k < 1$, 使

$$k^N \prod_{j=1}^N \int_{I_j} a(s) ds > 1 \quad (7)$$

再取 $0 < r < R$, 使

$$f_i(t, x_i(t)) \geq ka(t)x_i(t), \forall -\infty < t < +\infty, 0 \leq x_i(t) \leq r \quad (8)$$

令 $T_r = \{x_i(t) | x_i(t) \in E, \|x_i(t)\| < r\}$, 可证明

$$Ax_i(t) \text{ 不小于等于 } x_i(t), \forall x_i(t) \in P_{u_0} \cap \partial T_r, \quad (9)$$

事实上, 若存在 $x_i^1(t) \in P_{u_0} \cap \partial T_r$, 使 $Ax_i^1(t) \leq x_i^1(t)$, 由 $\frac{\omega}{N} \leq \frac{\tau}{2}$ 知, 当 $t \in I_j, (j=1, 2, \dots, N)$ 时, 有 $I_{j-1} \subset [t-\tau, t]$, 从而由(8)式, 可得

$$\begin{aligned} \int_{I_j} a(t)x_i^1(t) dt &\geq \int_{I_j} a(t)Ax_i^1(t) dt = \int_{I_j} a(t) dt \int_{t-\tau}^t f_i(s, x_i^1(s)) ds \\ &\geq \int_{I_j} a(t) dt \int_{I_{j-1}} f_i(s, x_i^1(s)) ds \geq k \left(\int_{I_j} a(t) dt \right) \left(\int_{I_{j-1}} a(s)x_i^1(s) ds \right) \end{aligned} \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

由此得

$$\begin{aligned} \int_{I_N} a(t)x_i^1(t) dt &\geq k^N \left(\prod_{j=1}^N \int_{I_j} a(t) dt \right) \cdot \left(\int_{I_0} a(t)x_i^1(t) dt \right) \\ &= k^N \left(\prod_{j=1}^N \int_{I_j} a(t) dt \right) \cdot \left(\int_{I_N} a(t)x_i^1(t) dt \right) \end{aligned} \quad (10)$$

因为 $\int_{I_N} a(t)x_i^1(t) dt \geq 0$, 设 $\int_{I_N} a(t)x_i^1(t) dt = 0$, 则由 $a(t) \geq 0, x_i^1(t) > 0$ 知 $a(t) = 0$, 从而 $\int_{I_N} a(t) dt = 0$ 这与(5)式矛盾, 所以 $\int_{I_N} a(t)x_i^1(t) dt > 0$, 再由(10)式得

$$k^N \left(\prod_{j=1}^N \int_{I_j} a(t) dt \right) \leq 1, \text{ 这与(7)式矛盾。所以(9)式成立。}$$

由(6)式, (9)式, 利用引理 2 的(H4)条件满足, 从而 A 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必具有不动点, 即方程(2)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解, 又方程(1)与(2)为同解方程。所以方程(1)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解。

参考文献:

[1] 郭大钧, 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985: 289-333.
 [2] R.W Leggett, L. R. Williams. A fixed point theorem with application to an infections disease model [J]. Math Anal Appl, 1980, 76: 91-97.
 [3] L. R. Williams, R.W Leggett, Nonzero solutions of equations modeling infections disease, SIAM[J]. Math Anal, 1982, (12): 112-121.

责任编辑: 胡德明

Periodic Solution for a Class of Lotka-Volterra Systems

Ding Wenguo, Zhang Xiaoe

(Mathematics Department, Huangshan University, Huangshan 245021, China)

Abstract: This paper discusses the existence of periodic solution for a class of Lotka-Volterra systems by employing a fixed point theorem in cones.

Key words: cone; fixed point; periodic solution

一类Lotka-Volterra型系统的 ω 周期解

作者: [丁文国, 张孝娥, Ding Wenguo, Zhang Xiaoe](#)
 作者单位: [丁文国, Ding Wenguo\(黄山学院, 数学系, 安徽, 黄山, 245041\), 张孝娥, Zhang Xiaoe\(朔州市聋哑学校, 山西, 朔州, 038300\)](#)
 刊名: [黄山学院学报](#)
 英文刊名: [JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY](#)
 年, 卷(期): 2010, 12(3)
 被引用次数: 0次

参考文献(3条)

1. 郭大钧 [非线性泛函分析](#) 1985
2. R. W Leggett, L. R. Williams [A fixed point theorem with application to an infections disease model](#) 1980
3. L. R. Williams, R. W Leggett [Nonzero solutions of equations modeling infections disease, SIAM](#) 1982(12)

相似文献(10条)

1. 期刊论文 [李东升, 李开泰, Li Dongsheng, Li Kaitai 关于锥内正映射不动点指标的一个猜想 - 西安交通大学学报](#) 2000, 34(4)

对E. N. Dancer提出的一个关于锥内正映射不动点指标的猜想进行了讨论. 首先利用泛函对锥的几何性质进行刻画, 然后在锥的内点非空的条件下, 利用算子扰动方法证明了这一猜想, 最后举例说明其应用.

2. 期刊论文 [惠淑荣, 张国伟 半序Banach空间中无界集上的不动点 - 吉林大学学报\(理学版\)](#) 2003, 41(3)

通过引入 u_0 序有界开集的概念, 利用无界集全连续算子的不动点指数, 在半序Banach空间中, 证明了无界集全连续算子的锥拉伸与锥压缩不动点定理.

3. 学位论文 [吴克晴 某些非线性算子的不动点理论](#) 2004

该文研究了某些非线性算子的不动点问题, 获得了一些不动点定理. 第一章研究了随机混合单调算子的随机不动点问题, 把[3]的一些混合单调算子不动点定理进行了随机化. 第二章研究了范围广泛的半闭1-集压缩算子, 在 e -连续的条件下把Amann三解定理进行了推广. 第三章运用文[9]无界集上的不动点指数去研究Banach空间无界集上的一些著名的边界条件以及固有值问题, 获得无界集上相应的定理. 第四章运用文[9]无界集上半闭1-集压缩象的不动点指数去研究半序Banach空间无界集上锥拉伸与锥压缩的问题, 获得无界集上相应的定理.

4. 期刊论文 [赵增勤, ZHAO Zengqin 锥上减映象的不动点及其在非局部边值问题中的应用 - 系统科学与数学](#)

2010, 30(4)

研究锥上一类减映象, 得到这类映象不动点的存在性、唯一性和迭代序列的收敛性. 其结果在二阶非局部边值问题中得到应用.

5. 期刊论文 [李东升, 李开泰 关于正映射锥上不动点指标的一个猜想 - 数学学报](#) 2003, 46(1)

本文在一些附加条件下证明了Dancer E. N. 提出的一个关于正映射锥上不动点指标计算的猜想, 并举例说明其应用.

6. 学位论文 [蒋开育 微分方程边值问题与非线性算子不动点](#) 2007

在本文中, 我们主要应用非线性泛函分析中的半序理论, 锥理论, Leray-Schuder拓扑度理论, 锥拉伸与锥压缩不动点理论, 以及上下解方法, 半序方法, 迭代方法对一些非线性微分方程边值问题和混合单调算子的不动点问题进行讨论, 并得到了一些新成果. 全文共分为四章.

第一章是本文的绪论部分, 主要介绍了本文的研究课题.

第二章主要考虑Sturm-Liouville方程的边值在一定的条件下, 得到了至少有三个非负解, 以及至少有 $2n-1$ 个非负解的结果(定理2.3.1, 推论2.3.2).

第三章主要考虑Nagumo条件下二阶三点边值问题第四章主要考虑锥中两类混合单调算子的不动点问题, 分别得到了连续性条件下与非紧不连续性条件下混合单调算子的不动点定理(定理4.1.2, 定理4.2.4). 本章主要利用锥拉伸与压缩不动点定理, 某些非线性算子(α 凹, α 凸算子, Φ 凹- $(-\Psi)$ 凸算子)的性质, 以及迭代技巧, 得到了不同情况下不动点的存在性结论.

7. 期刊论文 [宋桂安, 邵尹 关于Menger PN-空间中增算子不动点的研究 - 解放军理工大学学报\(自然科学版\)](#)

2001, 2(2)

首先在MengerPN-空间中引入锥理论, 然后利用锥理论来讨论MengerPN-空间的增算子不动点问题, 证明了①正规锥中, 凝聚增算子存在不动点; ②正则锥中, 连续增算子存在不动点; ③强极小锥中, 增算子存在不动点. 文章的结果不仅推广了Banach空间的相应结果, 也丰富了MengerPN-空间中的理论.

8. 期刊论文 [商玉凤, 刘庆怀, 高峻勇 马蹄形非凸区域上计算Brouwer不动点 - 吉林工学院学报\(自然科学版\)](#)

2001, 22(2)

给出了马蹄形非凸区域上计算Brouwer不动点计算方法, 以及马蹄形非凸区域上拟法锥的构造方法, 证明了拟法锥条件成立; 建立了组合同伦方程, 证明了同伦方程是收敛的, 且收敛到Brouwer不动点.

9. 期刊论文 [李振文, 赵增勤, LI Zhen-wen, ZHAO Zeng-qin - \$\alpha\$ 凹算子\(\$\alpha > 0\$ \)正不动点的存在性及应用 - 商丘师范学院学报](#) 2008, 24(6)

通过构造一个特殊的锥, 利用锥拉伸与压缩不动点定理对 α 凹算子($\alpha > 0$)正不动点的存在性做了研究, 并将结果应用到超线性Hammerstein积分方程

10. 学位论文 [商玉凤 马蹄形非凸区域上的伪锥构造及其在同伦内点法中的应用](#) 2001

该文主要研究用组合同伦内点法,求解非凸规划问题,研究了马蹄形非下周区域上组合同伦内点法实现;以及在该类非凸区域上计算Brouwer不动点的组合同伦算法的实现.具体结果如下:1、给出了关于马蹄形非凸区域满足拟法锥条件的必要条件,给出了相容毛发映射的选取方法及伪锥的构造方法,证明所选映射关于约束梯度是相容的,所选的伪锥满足伪锥条件,给出了算法与算例.2、对该类非凸区域进行了推广,对一般的情形给出了毛发映射与伪锥的构造方法,并证明了相应结论.3、对上述的马蹄形非凸区域,给出了计算马蹄形非凸区域上Brouwer不动点的组合同伦方程,证明所构造的伪锥满足伪锥条件,并给出了算法与算例.

本文链接: http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_hsxxyb201003003.aspx

授权使用: 黄山学院学报(qkhsxy), 授权号: 8df1c04e-54a8-4867-8a52-9eb901161a19

下载时间: 2011年4月2日