一类 Lotka-Volterra 型系统的 ω 周期解

丁文国[1],张孝娥[2]

(1.黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041; 2.朔州市聋哑学校,山西 朔州 038300)

摘　要:利用锥上不动点定理,研究了一类 Lotka-Volterra 型系统的 ω 周期解的存在性。

关键词:锥;不动点;周期解

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-447X(2010)03-0008-02

1　引　言

对于多元非自治系统 Lotka-Volterra 型模型

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=f_i(t,x_i(t))-f_i(t-\tau,x_i(t-\tau))\ ,\ i=1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

其中 $t\in R, x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))\in R^n$,对于 $i=1,2,\cdots,n$, $f_i(t,0)\equiv 0$, $\tau>0$, $f_i(t+\omega,x(t))\equiv f_i(s,x(t))$。一般是没有初等解法的,但在某些条件的约束下,利用巧妙的数学变形和锥的不动点定理,却能得到解的良好性质。

2　准备工作

定义 1:[1]设 E 是实 $Banach$ 空间,如果 P 是 E 中某非空凸闭集,并且满足下面两个条件:

(ⅰ) $x\in P,\lambda\geq 0\Rightarrow \lambda x\in P$

(ⅱ) $x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$,$\theta$ 表示 E 中零元素

则称 P 是 E 中的一个锥。

定义 2:若算子 $A{:}D\to E$ 是连续的,且又是紧的,则称 A 是映 D 到 E 的全连续算子。

引理 1(锥拉伸与锥压缩不动点定理):设 Ω_1, Ω_2 是 E 中有界开集 $\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)\to P$,全连续。如果满足条件

$(H_1)Ax$ 不大于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$;$Ax$ 不小于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$ (即锥拉伸),

或 $(H_2)Ax$ 不大于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$;$Ax$ 不小于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$ (即锥压缩)。

则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中必存在不动点。

引理 2:设 Ω_1,Ω_2 是 E 中有界开集 $\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续。设 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$,令

$$P_{u_0}=\{x|存在\ \lambda>0,使\ x\geq\lambda u_0\}$$

如果满足条件

$(H_3)Ax$ 不小于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$;$Ax$ 不大于等于 $(1+\varepsilon)x$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$, $\varepsilon>0$(即锥拉伸)

或 $(H_4)Ax$ 不小于等于 x, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$;$Ax$ 不大于等于 $(1+\varepsilon)x$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$, $\varepsilon>0$,(即锥压缩),则,A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中必具有不动点。

3　主要结果

对方程(1),变换成同解方程

$$x_i(t)=\int_{t-\tau}^{t}f_i(s,x_i(s))ds=A_ix_i(t),\ i=1,2,\cdots,n^{[2,3]} \qquad (2)$$

此方程是某些传染病的数学模型。

关于 $f_i(t,x_i(t))$,作下面四条假定:

$(H1)$ $f_i(t,x_i(t))$ 连续,非负, $\forall -\infty<t<+\infty, x_i(t)\geq 0$;

$(H2)$ $f_i(t,0)=0$,对 $\forall -\infty<t<+\infty$,存在 $\omega>0$,使得 $f_i(t+\omega,x)\equiv f_i(t,x)$, $\forall -\infty<t<+\infty, x_i(t)\geq 0$;

$(H3)$ 存在 $R>0$,使 $f_i(t,x)\leq\frac{R}{\tau}$, $\forall 0\leq t\leq\omega, 0\leq x\leq R$;

$(H4)$ 对于每个 $t\in(-\infty,+\infty)$,极限

收稿日期:2010-03-01

基金项目:安徽省教育厅自然科学研究基金资助(KJ2010B217);安徽省高等学校青年教师科研基金资助(2008jq1036)

作者简介:丁文国(1977-),安徽黄山人,黄山学院数学系讲师,硕士,研究方向为常微分方程及生物数学;
张孝娥(1959-),山西怀仁人,朔州市聋哑学校高级教师。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_i(t,x)}{x}=a_i(t) \tag{3}$$

存在有限，且对于每个 $k\in(0,1)$，都存在 $\epsilon_k>0$，使

$$f_i(t,x)\ge ka_i(t),\forall-\infty<t<+\infty,0\le x_i(t)\le\epsilon_k \tag{4}$$

结论：设条件 $(H1)$-$(H4)$ 满足，正整数 N 满足 $\frac{\omega}{N}\le\frac{\tau}{2}$，令 $I_j=[\frac{j-1}{N}\omega,\frac{j}{N}\omega],j=1,2,\cdots,N$ 。如果

$$\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(s)ds>1 \tag{5}$$

则方程(1)具有不恒为零的非负的周期为ω 的连续解。

由条件 $(H1)$-$(H4)$ 满足，对 $\forall-\infty<t<+\infty, a_i(t)$ 是非负的周期为 ω 的有界可测函数，所以(5)式左端各个积分都存在有限。令

$E_i=\{x_i(t)|x_i(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 ω 的连续函数$\}$，$i=1,2,\dots,n$ 。

由函数的线性运算，并作范数

$$\|x_i(t)\|=\sup_{-\infty<t<+\infty}|x_i(t)|=\max_{0\le t\le\omega}|x_i(t)|$$

E_i 成为 *Banach* 空间。令

$$P_i=\{x_i(t)|x_i(t)\in E,x_i(t)\ge0,-\infty<t<+\infty\},i=1,2,\dots,n$$

由定义 1 知 P_i 是 E_i 中的一个锥，又因为 A_i 将 P_i 中有界集映为 P_i 中一族函数，他们在 $0\le t\le\omega$ 上一致有界且等度连续，由定义 2 可知 $A_i:P_i\to P_i$ 全连续。

记 $T_R=\{x_i(t)|x_i(t)\in E,\|x_i(t)\|<R\}$，

下面证明

$Ax_i(t)$ 不大于等于 $(1+\varepsilon)x_i(t),\forall x_i(t)\in P_i\cap\partial T_R,\varepsilon>0$ (6)

我们可以使用反证，若存在 $x_i^0(t)\in P_i\cap\partial T_R$，及 $\varepsilon^0>0$ 使 $Ax_i^0(t)\ge(1+\varepsilon)x_i^0(t)$，则由 $(H3)$ 知

$$(1+\varepsilon^0)x_i^0(t)\le Ax_i^0(t)=\int_{t-\tau}^{t}f_i(s,x_i^0(s))ds\le\int_{t-\tau}^{t}\frac{R}{\tau}ds=R$$

从而 $(1+\varepsilon^0)\|x_i^0(t)\|\le R$，即 $(1+\varepsilon^0)R\le R$，这就得到了矛盾，所以得证。

令 $u_0(t)\equiv1$，则 $P_{u_0}=\{x_i(t)|x_i(t)\in E,x_i(t)>0,\forall-\infty<t<+\infty\}$ 。取 $0<k<1$，使

$$k^N\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(s)ds>1 \tag{7}$$

再取 $0<r<R$，使

$$f_i(t,x_i(t))\ge ka(t)x_i(t),\quad\forall-\infty<t<+\infty,0\le x_i(t)\le r \tag{8}$$

令 $T_r=\{x_i(t)|x_i(t)\in E,\|x_i(t)\|<r\}$，可证明

$Ax_i(t)$ 不小于等于 $x_i(t),\forall x_i(t)\in P_{u_0}\cap\partial T_r$，　(9)

事实上，若存在 $x_i^1(t)\in P_{u_0}\cap\partial T_r$，使 $Ax_i^1(t)\le x_i^1(t)$，由 $\frac{\omega}{N}\le\frac{\tau}{2}$ 知，当 $t\in I_j(j=1,2,\cdots,N)$ 时，有 $I_{j-1}\subset[t-\tau,t]$，从而由(8)式，可得

$$\int_{I_j}a(t)x_i^1(t)dt\ge\int_{I_j}a(t)Ax_i^1(t)dt=\int_{I_j}a(t)dt\int_{t-\tau}^{t}f_i(s,x_i^1(s))ds$$
$$\ge\int_{I_j}a(t)dt\int_{I_{j-1}}f_i(s,x_i^1(s))ds\ge k\left(\int_{I_j}a(t)dt\right)\left(\int_{I_{j-1}}a(s)x_i^1(s)ds\right)$$
$$(j=1,2,\cdots,N)$$

由此得

$$\int_{I_N}a(t)x_i^1(t)dt\ge k^N\left(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(t)dt\right)\cdot\left(\int_{I_0}a(t)x_i^1(t)dt\right)$$
$$=k^N\left(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(t)dt\right)\cdot\left(\int_{I_N}a(t)x_i^1(t)dt\right) \tag{10}$$

因为 $\int_{I_N}a(t)x_i^1(t)dt\ge0$，设 $\int_{I_N}a(t)x_i^1(t)dt=0$，则由 $a(t)\ge0$，$x_i^1(t)>0$ 知 $a(t)=0$，从而 $\int_{I_N}a(t)dt=0$ 这与(5)式矛盾，所以 $\int_{I_N}a(t)x_i^1(t)dt>0$，再由(10)式得 $k^N(\prod_{j=1}^{N}\int_{I_j}a(t)dt)\le1$，这与(7)式矛盾。所以(9)式成立。

由(6)式，(9)式，利用引理 2 的 $(H4)$ 条件满足，从而 A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 中必具有不动点。即方程(2)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解，又方程(1)与(2)为同解方程。所以方程(1)具有不恒为零的非负的周期为 ω 的连续解。

参考文献：

[1]郭大钧，非线性泛函分析[M].济南：山东科学技术出版社，1985:289-333.

[2]R.W Leggett, L. R. Williams. A fixed point theorem with application to an infections disease model [J]. Math Anal Appl, 1980, 76:91-97.

[3]L. R. Williams. R.W Leggett, Nonzero solutions of equations modeling infections disease, SIAM[J]. Math Anal, 1982,(12):112-121.

责任编辑：胡德明

Periodic Solution for a Class of Lotka-Volterra Systems

Ding Wenguo, Zhang Xiaoe

(Mathematics Department, Huangshan University, Huangshan245021, China)

Abstract: This paper discusses the existence of periodic solution for a class of Lotka-Volterra systems by employing a fixed point theorem in cones.

Key words: cone; fixed point; periodic solution

一类Lotka-Volterra型系统的ω周期解

作者： 丁文国， 张孝娥， Ding Wenguo， Zhang Xiaoe
作者单位： 丁文国,Ding Wenguo(黄山学院,数学系,安徽,黄山,245041)， 张孝娥,Zhang Xiaoe(朔州市聋哑学校,山西,朔州,038300)

刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2010，12(3)
被引用次数： 0次

参考文献(3条)

1. 郭大钧 非线性泛函分析 1985

2. R.W Leggett. L.R.Williams A fixed point theorem with application to an infections disease model 1980

3. L.R.Williams. R.W Leggett Nonzero solutions of equations modeling infections disease,SIAM 1982(12)

相似文献(10条)

10.学位论文 商玉凤 马蹄形非凸区域上的伪锥构造及其在同伦内点法中的应用 2001

该文主要研究用组合同伦内点法,求解非凸规划问题,研究了马蹄形非下周区域上组合同伦内点法实现;以及在该类非凸区域上计算Brouwer不动点的组合同伦算法的实现.具体结果如下:1、给出了关于马蹄形非凸区域满足拟法锥条件的必要条件,给出了相容毛发映射的选取方法及伪锥的构造方法,证明所选映射关于约束梯度是相容的,所选的伪锥满足伪锥条件,给出了算法与算例.2、对该类非凸区域进行了推广,对一般的情形给出了毛发映射与伪锥的构造方法,并证明了相应结论.3、对上述的马蹄形非凸区域,给出了计算马蹄形非凸区域上Brouwer不动点的组合同伦方程,证明所构造的伪锥满足伪锥条件,并给出了算法与算例.