高等数学中的构造辅助函数

刘 勇

(江苏城市职业学院 张家港办学点，江苏 张家港 215600)

摘 要:通过构造辅助函数来解题是数学分析中的一种重要方法,为此通过典型实例体现构造辅助函数在高等数学多方面解题中的应用,同时对构造辅助函数解决的问题进行了归纳,并总结了构造辅助函数的步骤。

关键词:辅助函数;证明;函数;分析

中图分类号:G642.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2009)03-0118-04

构造函数思想是高等数学的一种重要的思想方法,在高等数学中具有广泛的应用,它属于数学思想方法中的构造。在数学解题中经常运用它,但是如何构造辅助函数,始终是一个难点,因此应重视这种思想方法的引导和渗透,多归纳总结,本文对数学分析中的几类问题,使用构造函数的方法求解,阐明了构造的思想和具体的方法。

1 证明方程根及中值ζ的存在性

在证明方程根的存在性及中值的存在性时,常要构造辅助函数,找到合适的辅助函数是论证的关键所在,这类问题一般用中值定理来解决,在证明时,要注意验证所构造的辅助函数满足所用定理的条件。

1.1 辅助函数用零点定理证明

若题设中没有抽象函数连续的条件,或所给的方程是具体方程,此时应考虑用零点定理,构选辅助函数的方法是通过移项,把方程的一端化为零,另一端即为所要构造的辅助函数(若结论是含有等式,则把ζ换成x)。

例1 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$,证明方程$f(x)=x$在$[0,1]$上至少有一个实根。

证明:构造辅助函数$F(x)=f(x)-x$,显然$F(x)$在$[0,1]$上连续且于$F(0)=f(0)\geqslant 0$,$F(1)=f(1)-1\leqslant 0$,若$F(0)$,$F(1)$中至少有一个为零,则0,1中至少有一个是$f(x)=x$的根,若$F(0)>0$,$F(1)<0$则由零点定理知,$\exists\zeta\in(0,1)$使$F(\zeta)=0$,即方程$F(x)=x$在$(0,1)$内至少有一个实根ζ。

所以,在$[0,1]$上方程$F(x)>x$至少有一个实根。

对于具体的方程或含ζ的等式,若构造的函数经验证不符合零点定理,即用零点定理证明失效时,则改用罗尔定理,此时,需寻找该函数的原函数$F(x)$作为所构造的辅助函数。

1.2 构造辅助函数用罗尔定理证明

对于上述问题以及含有抽象函数$f(x)$及其导数$f'(x)$的方程式关于ζ的等式,在证明时,应构造辅助函数,用罗尔定理证明,此时构造函数的一般方法是寻找原函数,其步骤为:

1.若证的是含有ζ的等式,先把ζ改为x,使等式成为方程。

2.把方程看作是以$f(x)$为未知函数的微分方程,然后解微分方程。

3.求出解后,把$\forall$常数C移到一端,另一端即为所要构造的辅助函数。[2]

收稿日期:2009-02-05

作者简介:刘 勇(1975-),安徽黄山人,江苏城市职业学院张家港办学点讲师。

例 2　已知 $a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，试证在 $[0,1]$ 内至少有一点 ζ，使 $a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots+a_n\zeta^n=0$。

分析，此题按 1.1 节中的方法，用零点定理失效，故用罗尔定理在 $a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots+a_n\zeta^n=0$ 中令 $\zeta=x$，得 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 两边积分得 $a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=c$，令 $F(x)=a_0x_1+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 易验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，从而可知 $\exists\zeta\in(0,1)$，使 $F(\zeta)=0$，即

$$a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\cdots+a_n\zeta^n=0。$$

例 3　设 $f(x)$ 函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，试证方程 $f'(x)=-\frac{2f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

分析，对 $f'(x)=-\frac{2f(x)}{x}$ 分离变量得

$f'(x)/f(x)=-\frac{2}{x}$，两边积分得

$$\ln f(x)=-2\ln x+\ln c\Rightarrow f(x)=\frac{c}{x^2}\Rightarrow x^2f(x)=c，$$

令 $F(x)=x^2f(x)$ 即为所造的辅助函数，然后用罗尔定理证明之。

1.3　构造辅助函数用拉格朗日中值定理或柯西中值定理证明

若方程或含 ζ 的等式中含有函数值之差，则考虑用拉格朗日中值定理证之，若含有两个两点的函数值之差的比，则考虑用柯西中值定理证之，此时，所要构造的函数，可通过恒等变形用观念法得出。

例 4　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证 $\exists\zeta\in(a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

分析等式左边是两点的函数值之差与自变量之差相比，符合拉格朗日中值公式的形式，故构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$。

证明：令 $F(x)=xf(x)$，由题设可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可导，则由拉格朗日中值定理知，$\exists\zeta\in(a,b)$，使 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=F'(\xi)$，又 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，

所以 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)(a<\xi<b)$。

例 5　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明 $\exists\zeta\in(a,b)$，使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

分析：$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$，经过恒等变形后的式子符合柯西中值定理形式，故构造辅助函数 $f(x)=x^2$，对 $f(x)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用柯西中值定理，即可证得结论。

2　证明恒等式

对于恒等式的证明，常用拉格朗日中值定理的推论证之。

1.构造辅助函数的方法，把函数移到等号左端，常量移到符号右端，左端即为所要构造的辅助函数。

2.证明恒等式的步骤：(1)在给定的区间上构造辅助函数 $F(x)$；(2)证明在该区间上 $F'(x)=0$；(3)推出 $F(x)=c$；(4)代入区间内特殊的 x 值，确定常数 c。[3]

例 6　证明 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geq1)$

证明：当 $x=1$，左端 $=\pi=$ 右端，

当 $x>1$，令 $F(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$，则

$$F'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=0，$$

所以 $F(c)=0$，又因 $F(\sqrt{3})=2\arctan\sqrt{3}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi$，所以 $c=\pi$，

从而 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geq1)$。

例 7　证明 $\int_1^a f[x^2+\frac{a^2}{x^2}]\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}(a>0)$

分析：观看等式左右两边，发现等式左右两边 f 函数的自变量 x 和 x^2 同形，于是令 $t=x^2$，从而使左边化简为积分 $\frac{1}{2}\int_1^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$，再比较这个积分的上限 a^2 与右端积分的上限 a 是两者唯一的区别，因此这又提示我们分此积分为两段，得：

$$\frac{1}{2}\int_1^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^{a}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}，$$

再由这个积分与原证明等式比较，只需证明

$\frac{1}{2}\int_a^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^{a}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}$，再令"$t=\frac{a^2}{u}$"，则得

$$\int_1^{a^2}f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t}=\int_1^{a}f(u+\frac{a^2}{u})\frac{du}{u}。$$

证明：令 $x^2=t$，则 $\int_1^a f[x^2+\frac{a^2}{x^2}]\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}$，

又 $\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^{a} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}$，

又令 $t=\frac{a^2}{u}$，即 $u=a^2/t$，所以

$$\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\int_1^{a} f[u+\frac{a^2}{u}]\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\int_1^{a} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t},$$

$$\therefore \int_1^a f[x^2+\frac{a^2}{x^2}]\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{a} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_1^{a} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}=\int_1^{a} f[t+\frac{a^2}{t}]\frac{dt}{t}$$

$$=\int_1^{a} f[x+\frac{a^2}{x}]\frac{dx}{x}\ 。$$

3 构造辅助函数证明不等式

3.1 构造辅助函数用单调性证之

对于形如 $f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<g(x)$ 的函数不等式，常构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 或 $F(x)=g(x)-f(x)$ 用单调性证之，其步骤为：

1.构选函数 $F(x)=f(x)-g(x)$；

2.证 $F'(x)>0$(或<0)得出单调性；

3.求出 $F(x)$ 在区间端点之一处的函数值或极限值；

4.最后根据函数单调性及区间端点的函数值得出所证不等式。[3]

例 8 证明当 $x>0$ 时，$x>ln(1+x)$

证明：令 $F(x)=x-ln(1+x)(x)(x\geqslant 0)$，当 $x>0$ 时，

$F'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$,

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $F(0)=0$，故当 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$，即 $x-ln(1+x)>0$ 所以 $x>ln(1+x)$。

3.2 构造辅助函数用拉格朗日中值定理证明

对于常值不等式或函数不等式，经过恒等变形后，若出现函数差值与自变量之差之比，符合拉格朗日中值公式的形式，则用拉格朗日中值定理证之，此时所要构造的辅助函数可观摩得出，证明步骤为：

1.构造辅助函数，找到相应区间 I；

2.验证该函数在区间 I 上满足拉格朗日中值定理的条件；

3.写出拉格朗日中值定理公式；

4.由此 ζ 满足的不等式，对 $f'(\zeta)$ 放大或缩小，从而消去 ζ，得到所要证明的不等式。

例 9 证明 $\frac{b-a}{1+b^2}<arctanb-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}(0<a<b)$

分析：将 $\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$ 改写成 $\frac{1}{1+b^2}<\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\frac{1}{1+a^2}$，观察知，中间的式了符合拉格朗日中值公式的形式，故构造辅助函数 $F(x)=arctanx$。

证明：令 $F(x)=arctanx$，则 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$F(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，且 $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$。

由拉格朗日中值定理得 $\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\frac{1}{1+\xi^2}$ $\xi\in(a,b)$

$a<\xi<b\Rightarrow 1+a^2<1+\xi^2<1+b^2\Rightarrow\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1+a^2}$

又 a<b，

所以 $\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}(0<a<b)$。

3.3 构造辅助函数用最大值(或最小值)证明

对于含有等号的函数不等式，若 $F'(x)$ 在 (a,b) 内变号时，不易使用单调性证明，若用单调性，则需分情况讨论较麻烦，此时应考虑用函数的最值进行证明，步骤如下：

1.构造辅助函数 $F(x)$，把常数移到等号的一端，另一端即为所要构造的辅助函数；

2.求 $F'(x)$，令 $F'(x)=0$，求出驻点；

3.求最值；

4.根据最值写出所证不等式。[4]

例 10 若 $x>0$，证明 $x-lnx>1$

证明：令 $F(x)=x-lnx$，则 $F'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $x>0$ 时，$F'(x)$ 变号不易用单调性证明。

令 $F'(x)=0$，得驻点 $x=1$，当时 $0<x<1$，$F'(x)<0$；当 $x>1$，$F'(x)>0$，故 $x=1$，是 $F(x)$ 的极小值点，又 $x=1$ 是 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内唯一驻点，且是极小值点，故 $x=1$ 是 $F(x)$ 的最小值点，且 $F(x)$ 的最小值且为 $F(1)=1$，所以 $x>0$ 时，$F(x)\geqslant 1$，即 $x-lnx>1$。

4 构造辅助函数求极限

例 11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}]$

分析：此题求数列的极限，如果直接用数列极限的有关方法来求比较麻烦，但如果我们利用辅助函数并根据定积分的定义就可以轻易解题。

解：因为 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$，

又 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在[0，1]上连续，从而可积，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2。$$

5　构造辅助函数讨论方程的根

解方程 $f(x)=0$，实质上就是求函数 $f(x)$ 的零点，关于函数零点的问题一般是利用连续的性质及微分中值定理来解决。

例 12　已知 $f(x)$ 在[0，1]上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，求证对 ∀ 实数 $a(0<a<1)$ 必存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $x_0+a\in[0,1]$，且 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

分析：此题要证 $f(x_0)=f(x_0+a)$，即可证 $f(x_0)-f(x_0+a)=0$，由此想到可构造一个辅助函数 $F(x)$，使得 $F(x)$ 在点 x_0 处取得的函数值为 0，进而得证。

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则有 $F(0)=-f(a)\leqslant 0$，从而有 $F(1-a)=f(1-a)\geqslant 0$，而 $F(x)$ 在 $[0,1-a]$ 连续，由介值实理 ∃ $x_0\in[0,1-a]$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

6　用辅助函数计算积分及求函数值

有时确定被积函数的原函数是十分困难的，若能引入适当的辅助函数，困难就解决了。

例 13　已知 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$，求 $f'(0)$

分析：同 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt$，故被积函数 $\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 不连续，故这导致不能直接用对积分限求导的公式来求 $f'(0)$，用分部积分公式来替换被积函数，使新的被积函数在点 $x=0$ 连续是解决问题的一个途径。

解：当 $x\neq 0$ 时，

$$f(x)=-\int_0^x t^2d(\sin\frac{1}{t})=(-t^2\cdot\sin\frac{1}{t})\Big|_0^x+\int_0^x\sin\frac{1}{t}dt^2$$

$$=-x^2\sin\frac{1}{x}+\int_0^x 2t\cdot\sin\frac{1}{t}dt$$

令 $f_1(x)=\begin{cases}-x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　$f_2(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

所以 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f'(0)=0$，所以对一切 x 有 $f(x)=f_1(x)+\int_0^x f_2(t)dt$，所以 $f'(0)=f_1'(0)+[\int_0^x f_2(t)dt]'\ x=0=0+f_2(0)=0$

总之，辅助函数的构造离不开分析推理和联想，恰当的构思，巧妙的假设，充分的推理论证是每个研习高等数学的人们所不可缺少的修养和素质。重视辅助函数的构造，不仅可以启迪人的思维，还可以使我们提高数学学习的兴趣。

参考文献：

[1]孙本旺.数学分析中的典型例题和解题方法[M].长沙：湖南教育出版社，1981.

[2]段应全.数学分析方法选讲[M].重庆：西南师范大学出版社，1999.

[3]裴礼文.数学分析中的典型例题与方法[M].北京：高等教育出版社，1993.

[4]吴良森，毛羽辉，等.数学分析习题精解[M].北京：科学出版社，2003.

责任编辑：胡德明

Application of Constructing Assistant Function in Higher Mathematics

Liu Yong

(Zhangjiagang School, Jiangsu City Vocational Institute, Zhangjiagang 215600, China)

Abstract: Construction of assistant function is an important method in mathematic analysis. This paper introduces the application of it in solving problems in higher mathematics through typical examples, generalizes the problems that can be solved by it, and summarizes its steps.

Key words: assistant function; proof; function; analysis

高等数学中的构造辅助函数

作者： 刘勇， Liu Yong
作者单位： 江苏城市职业学院张家港办学点,江苏,张家港,215600
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2009，11(3)

相似文献(10条)

1. 期刊论文 徐小会.XU Xiao-hui 不等式证明中的辅助函数作法技巧 -沈阳师范大学学报（自然科学版）2006,24(1)

辅助函数的构造是高等数学教学中的重要内容之一,也是学生所要掌握的重要的解题方法之一.从几类不等式的证明出发,研究了这些情况下辅助函数的构造技巧,有助于帮助我们迅速准确地解题.

2. 期刊论文 胡承钧.HU Cheng-jun 辅助函数在证明题目中的作用 -西昌学院学报（自然科学版）2008,22(4)

本文分析了利用辅助函数证明微分中值类公式的基本方法.

3. 期刊论文 李万玉 高等数学证明中关于辅助函数的构造 -北京电子科技学院学报2002,10(1)

本文通过例证的方法讨论了高等数学中有关利用辅助函数进行证明的方法,说明了使用这些方法的的优越性和使用时可能的题型.

4. 期刊论文 丁超 构造辅助函数,利用函数性质证明不等式 -湖南第一师范学报2004,4(4)

将不等式问题转化为函数问题,利用函数性质来研究、解决不等式问题,使学生掌握不等式证明的一种函数思想方法,从而提高学生的分析问题与解决问题的能力.

5. 期刊论文 关泽满 辅助函数法在数学证明中的应用 -天津职业技术师范学院学报2001,11(2)

通过一些数学问题的证明,讨论了辅助函数在证明过程中的应用以及通过观察所要求证的结论,采用变形、积分等方法来构造辅助函数.

6. 期刊论文 邹国辉 中值定理或命题证明中辅助函数构造的几种思路 -九江学院学报（自然科学版）2005,20(1)

在现行人大版教材<微积分>中证明拉格朗日中值定理时,首先构造一个辅助函数,然后验证辅助函数满足罗尔定理的假设条件,最后利用罗尔定理的结论得出拉格朗日定理的证明.我认为关键是弄清楚如何构造这个辅助函数,一旦辅助函数构造出来了,剩下的只是一些验证演算了.

7. 期刊论文 王玉民.赵广生.白荣凤.WANG Yu-min.ZHAO Guang-sheng.BAI Rong-feng 利用辅助函数证明的几个实例 -北京农学院学报2007,22(2)

通过中值定理和零点定理等相关问题的证明过程,给出了构造辅助函数的一般思路,以此帮助初学者快速掌握构造辅助函数的方法和技巧,提高他们解答证明题的能力.

8. 期刊论文 李冬梅 利用参数变导法引入证明中值定理的辅助函数 -辽宁师范大学学报(自然科学版)2004,27(2)

微分学中有3个著名的中值定理,其中在Lagrange中值定理的证明过程中,引入了辅助函数,然后由Rolle中值定理来证明Lagrange中值定理.这个突如其来的辅助函数很难让学生理解和接受.文中从一个全新的角度,利用参数变异法引入辅助函数,攻克了教学难点.

9. 期刊论文 张跃.董俊 如何构造辅助函数证明中值等式 -四川兵工学报2008,29(2)

当利用中值定理证明等式成立时,辅助函数的构造往往是证明等式成立的难点和关键,通过构造一个或多个辅助函数来说明构造辅助函数证明中值等式的方法.介绍了3种常用构造辅助函数的方法.

10. 期刊论文 林忠.LIN Zhong 拉格朗日定理证明与辅助函数的应用 -天津职业院校联合学报2006,8(5)

微分中值定理的证明和应用,大量采用了辅助函数.通过分析各种教科书对拉格朗日定理证明中引用辅助函数的和典型题目的研究,试图找出构造辅助函数的内在规律.