Banach 代数中鞅变换的若干收敛性

洪 沆,查志明
(黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041)

摘 要:主要讨论了Banach代数中鞅变换的收敛性,指出在一类条件下,鞅变换是依范数收敛及几乎处处收敛的。

关键词:Banach代数;p阶光滑;可预测序列;鞅变换;收敛
中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2009)03-0010-03

1 引言及定义

设(Ω,Σ,p)为完备的概率空间,$(B,\|\cdot\|)$为实可分的*Banach*空间,$\{\Sigma_n,n\geqslant 0\}$ 是Σ的一个单调上升的子σ代数序列,定义在(Ω,Σ,p)而取值于B上的强可测函数称为B值随机变量。令$1\leq p\leq 2$,$L_p(\Omega,\Sigma,p,B)=\{f:f\}$为定义在$(\Omega,\Sigma,p)$上的$B$值随机变量,且$\|f\|_p=(\int_\Omega\|f\|^p dp)^{\frac{1}{p}}$,

设 $\int_\Omega\|f\|^p dp<\infty\}$, $\forall f\in L_p(\Omega,\Sigma,P,B)$,

则$L_p(\Omega,\Sigma,p,B)$为完备的*Banach*空间。

定义1 设$1\leq p\leq 2$,如果存在常数使得对任意的B值L_p可积的鞅序列$\{\eta_n=\sum_{k=0}^n\xi_k,k\geq 0\}$以及$\forall n\geq 1$,都有$E\left\|\sum_{i=1}^n\xi_i\right\|^p\leq c\sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^p$,则称*Banach*空间$B$是$P$阶光滑的。

定义2 若B是某个数域R(下面取R为实数域)上的线性空间,对任意的x、$y\in B$,存在唯一的乘积$xy\in B$,且满足(i)$(xy)z=x(yz)$($\forall x$、y、$z\in B$)

(ii)$x(y+z)=xy+xz$($\forall x$、y、$z\in B$)

(iii)$(\alpha\beta)xy=(\alpha x)(\beta y)$($\forall\alpha$、$\beta\in R$,$\forall x$、$y\in B$)

(iv)有单位元$e\in B$,使$ex=xe=x$($\forall x\in B$),则称B是(实数域R上的)代数。

定义3 若代数B是*Banach*空间,且满足

(i) $\|xy\|\leq\|x\|\cdot\|y\|$($\forall x$、$y\in B$)

(ii) $\|e\|=1$, 则称B是*Banach*代数。

定义4 设B是*Banach*代数,$\{\eta_n=\sum_{k=0}^n\xi_k,k\geq 0\}$是$B$值鞅序列,$\{H_n,n\geqslant 0\}$是$B$值可预测序列,令

$X_n=\sum_{k=0}^n H_k\xi_k$, $n\geqslant 0$,则称X_n是关于鞅序列

$\{\eta_n=\sum_{k=0}^n\xi_k,k\geq 0\}$的鞅变换,简称鞅变换。

注:$\{X_n=\sum_{k=0}^n H_k\xi_k,n\geq 0\}$仍为鞅序列。

鞅变换是由*Burkholder*于1966年引入的,很多学者都曾对它进行过一些研究,其中就包含鞅变换的收敛性问题,而本文所关注的则是在*Banach*代数中鞅变换的收敛性,包括依范数收敛与几乎处

收稿日期:2009-02-27
作者简介:洪 沆(1972-),安徽黄山人,黄山学院数学系讲师,研究方向为概率论。

处收敛。

2 主要结论及其证明

引理 1[2] 设鞅$\{Xn\}_{n\geq 0}$依L_1范数收敛,则$\{X_n\}_{n\geq 0}$几乎处处收敛。

定理 1 设 B 是 P 阶光滑的 *Banach* 代数,$1\leq p\leq 2$,$\{\eta_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k,k\geq 0\}$是 B 值鞅序列,$\{H_n,n\geq 0\}$是可预测序列,令

$$X_n=\sum_{K=0}^{n}H_K\xi K,n\geq 0,\alpha>0,$$

令 $A_\alpha=\{\sup_{n\geq 0}\|H_\alpha\|\leq\alpha\}$,则限制在 $A\alpha$ 上,$\lim_{n\to\infty}X_n$ $a.e$ 存在。

证明:令 $H_n^\alpha=\begin{cases}H_n & \|H_n\|\leq\alpha\\ 0 & \|H_n\|>\alpha\end{cases}$ 则$\{H_n^\alpha,n\geq 0\}$仍然是可预测序列。令 $X_n^\alpha=\sum_{k=0}^{n}H_k^\alpha\xi_k$,则$\{X_n^\alpha,n\geq 0\}$为 B 值鞅。由于 B 是 p 阶光滑的 *Banach* 代数,故存在常数 c,$\forall m>n$,有 $E\|X_m^\alpha-X_n^\alpha\|^p=E\|\sum_{K=n+1}^{m}H_k^\alpha\xi_K\|^p\leq c\sum_{K=n+1}^{m}E\|H_k^\alpha\xi_K\|^p\leq c\alpha^p\sum_{K=n+1}^{m}E\|\xi_K\|^p$,因为 $\sum_{n=0}^{\infty}E\|\xi_n\|^p<\infty$ 令 $n\to\infty$ 则 $E\|X_m^\alpha-X_n^\alpha\|^p\to 0$,由于 $L_p(\Omega,\Sigma,p,B)$为完备的 *Banach* 空间,故$\{X_n^\alpha,n\geq 0\}$依 L_p 范数收敛。从而$\{X_n^\alpha,n\geq 0\}$依 L_1 范数收敛。

由引理 1,则序列$\{X_n^\alpha\}_{n\geq 0}$ $a\cdot e$ 收敛,即 $\lim_{n\to\infty}X_n^\alpha a\cdot e$ 存在。

注意到在 A_α 上,$X_n=X_n^\alpha$,则 $\lim_{n\to\infty}X_n$ 存在 $a\cdot e$ 于 A_α。

推论 1 设 B 是 p 阶光滑的 *Banach* 代数,$1\leq p\leq 2$,$\{\eta_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k,k\geq 0\}$ 是 B 值鞅序列,$\{H_n,n\geq 0\}$是可预测序列,令$X_n=\sum_{k=0}^{n}H_k\xi_k$,$n\geq 0$,若存在常数 α 使得 $\sup_{n\geq 0}\|H_n\|\leq\alpha<\infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}E\|\xi_n\|^p<\infty$,那么$\{X_n,n\geq 0\}$依 L_p 范数及几乎处处收敛。

推论 2 设 B 是 p 阶光滑的 *Banach* 代数,$1\leq p\leq 2$,$\{\eta_n=\sum_{K=0}^{n}\xi_K,k\geq 0\}$是 B 值鞅序列,$\{H_n,n\geq 0\}$是可预测序列,$X_n=\sum_{K=0}^{n}H_k\xi_K,n\geq 0\}$,若 $\sup_{n\geq 0}\|H_n\|\leq\alpha<\infty$,$\{a_n,n\geq 0\}$为正项数列且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{1-p}E\|\xi_n^a\|^p<\infty$,则当 (i) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{1-p}E\|\xi_n\|^p<\infty$ 或(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{1-\frac{2}{p}}E\|\xi_n\|^p<\infty$ 时,$\lim_{n\to\infty}X_n$ $a\cdot e$ 存在。

证明:(i)令 $A_n=E^{\frac{1}{p}}\|\xi_n\|^p$,由于 $1\leq p\leq 2$ 则

$$A_n=A_n\cdot I_{\{A_n\leq a_n\}}+A_n\cdot I_{\{A_n>a_n\}}$$

$$\leq a_n+E^{\frac{1}{p}-1}\|\xi_n\|^p\cdot E\|\xi_n\|^p\cdot I_{\{A_n>a_n\}}$$

$$\leq a_n+a_n^{1-p}E\|\xi_n\|^p$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n<\infty$,$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{1-p}E\|\xi_n\|^p<\infty$,

故 $\sum_{n=0}^{\infty}E^{\frac{1}{p}}\|\xi_n\|^p<\infty$,

则存在正整数 N,当 $n\geq N$ 时,$E^{\frac{1}{p}}\|\xi_n\|^p<1$,从而 $E^{\frac{1}{p}}\|\xi_n\|^p\geq E\|\xi_n\|^p$,故 $\sum_{n=0}^{\infty}E(\|\xi_n\|^p)<\infty$。

由推论 1,则 $\lim_{n\to\infty}X_n$ $a\cdot e$ 存在。

(ii)令 $A_n=E^{\frac{p}{2}}(\|\xi_n\|^p)$ 由于 $1\leq p\leq 2$ 则

$$A_n=A_n\cdot I_{\{A_n\leq a_n\}}+A_n\cdot I_{\{A_n>a_n\}}$$

$$\leq a_n+E^{\frac{p}{2}-1}(\|\xi_n\|^p)\cdot E(\|\xi_n\|^p)\cdot I_{\{A_n>a_n\}}$$

$$\leq a_n+a_n^{1-\frac{2}{p}}\cdot E\|\xi_n\|^p$$

从而 $\sum_{n=0}^{\infty}A_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}[a_n+a_n^{1-\frac{2}{p}}\cdot E(\|\xi_n\|^p)]<\infty$ 即 $\sum_{n=0}^{\infty}E^{\frac{p}{2}}(\|\xi_n\|^p)<\infty$,因而存在正整数 N,当 $n\geq N$ 时,$E^{\frac{p}{2}}\|\xi_n\|^p<1$,则 $E^{\frac{p}{2}}\|\xi\|^p\geq E\|\xi_n\|^p$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} E(\|\xi_n\|^p) < \infty$，

由推论 1，则 $\lim_{n\to\infty} X_n$ a.e 存在。

定理 2　设 B 是 p 阶光滑的 Banach 代数，$1\le p\le 2$，$\{\eta_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k, k\ge 0\}$ 是 B 值鞅序列，$\{H_n, n\ge\}$ 是可预测序列，令 $X_n=\sum_{k=0}^{n} H_k\xi_k$，$n\ge 0$，

若 $\sup_{n\ge 0}\|H_n\|<\infty$ a·e，且 $\sum_{n=0}^{\infty} E\|\xi_n\|^p<\infty$，

则 $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ a·e 存在。

证明：显然 $\{\sup_{n\ge 0}\|H_n\|<\infty\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\sup_{n\ge 0}\|H_n\|\le i\}$，

由定理 1 所证，对几乎所有的 $\omega\in\{\sup_{n\ge 0}\|H_n\|<i\}$，

$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ 存在，则对几乎所有的

$$\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\sup_{n\ge 0}\|H_n\|<i\},\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) 存在,$$

即 $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ a·e 存在。

参考文献：

1. 胡迪鹤. 甘师信, 近代鞅论[M]. 武汉：武汉大学出版社, 1993.
2. 刘培德. 鞅与 Banach 空间几何学[M]. 北京：科学出版社, 2007.

责任编辑：胡德明

Some Convergence Properties of Martingale Transforms in Banach Algebra

Hong hang Zha zhiming
(Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan 245041, China)

Abstract: This paper mainly probes into the convergence properties of martingale transform in Banach algebra, and points out that under a certain condition, martingale transform converges almost everywhere according to norm.

Key words: Banach algebra; p step smooth; predictable sequence; martingale transform; convergence

Banach代数中鞅变换的若干收敛性

作者： 洪沆， 查志明， Hong hang， Zha zhiming
作者单位： 黄山学院,数学系,安徽,黄山,245041
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2009，11(3)

相似文献(1条)

1.期刊论文 云亮.于林.Yun Liang.Yu Lin Banach代数中鞅变换的收敛性 -三峡大学学报（自然科学版） 2008,30(3)

主要研究取值于p阶光滑的Banach代数中的可预报序列与鞅变换,重点讨论了鞅变换的p阶条件数学期望的收敛性,推广了胡迪鹤在文献[3]中的相应结论,完善了鞅变换的收敛理论.