一类次黎曼流形上测地线的研究

张学华

(黄山学院 数学系,安徽 黄山 245021)

摘 要:构造了一类步数为 2(k+1)的次黎曼流形,讨论了其上面连接原点和适当远点的奇异测地线的存在性。

关键词:次黎曼流形;步数;正规测地线;奇异测地线

中图分类号:O186.13 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2009)03-0005-05

1 引 言

1991 年 *Montgomery* 第一次证明了奇异测地线的存在性,在次黎曼流形(R^3,D,g)上,其中 $D=\{(x,y,z)\in R^3:dz-\frac{1}{2}y^2dx=0\}$,$\dim D=2$,*Montgomery* 发现超曲面$\{y=0\}$上的水平曲线不能由次黎曼测地线方程解的投影得到,同时证明了这些水平曲线的极小性,即它们是不同于正规测地线的一类水平曲线即奇异测地线。因此奇异测地线的存在与否也是黎曼几何和次黎曼几何的本质区别之一。本文在一类步数为 2(k+1)的次黎曼流形上,讨论了连接原点和适当远点的奇异测地线的存在性。

设(Γ,M,π)为一纤维丛,在底空间 M 上给定一度量 h,从空间 Γ 上的一形式 ω 定义一不可积水平分布 $D=\ker\omega$,则次黎曼测地线问题可描述为下面这样一个问题,找所有曲线 $c:[0,1]\to\Gamma$,使得下面条件得到满足:(1)$c(0)=A$;(2)$c(1)=B$;(3)$c(s)\in D$;(4)c 是泛函 $c\to\int_0^1\frac{1}{2}\left|\dot{\gamma}(s)\right|_h^2ds$ 的临界点,这里 $\gamma=\pi\circ c$ 是曲线 c 在底空间 M 上的投影。由于

$$\dot{\gamma}(s)=\gamma_*\left(\frac{d}{ds}\right)=(\pi\circ c)_*\left(\frac{d}{ds}\right)=\pi_*(\dot{c}(s))$$

则 A,B 之间满足条件(3),(4)的曲线 c 即是泛函 $c\to\int_0^1L(c(s),\dot{c}(s))ds$ 的临界点,这里 Lagrangian 为 $L(c(s),\dot{c}(s))=\frac{1}{2}\left|\pi_*(\dot{c}(s))\right|_h^2+\theta\omega(\dot{c})$,其中 θ 为 Lagrange 乘子。

给定切向量场

$$Y_1=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^{4k+2}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_2|x|^{2k}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$Y_2=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^{4k+2}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-2x_1|x|^{2k}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

这里 $|x|^{2k}=\left(x_1^2+x_2^2\right)^k$,$k\in z_+=\{0,1,2,\cdots\}$,由 Y_1,Y_2 诱导的 *Hamiltonian* 为

$$H(x,\xi,\theta)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+|x|^{4k+2}}\left[\left(\xi_1+2x_2|x|^{2k}\theta\right)^2+\left(\xi_2-2x_1|x|^{2k}\theta\right)^2\right],$$

本文我们考虑和此 *Hamiltonian* $H(x,\zeta,\theta)$所对应的水平曲线。

2 一类步数为 2(k+1)的次黎曼流形上测地线研究

本节在步数为 2(k+1)的次黎曼流形上,讨论了

收稿日期:2008-09-02

基金项目:黄山学院科研基金资助(2006xkjq002)

作者简介:张学华(1980-),山东临沂人,黄山学院数学系讲师,硕士,研究方向为几何分析。

连接原点和适当远点的奇异测地线的存在性。

2.1 次黎曼测地线方程的建立

我们考虑 $\Gamma=R^3, M=R^2, \pi(x_1,x_2,t)=(x_1,x_2)$，水平分布 D 是由切向量场 Y_1, Y_2 生成的。因 Y_1, Y_2 和 $[Y_1, Y_2]$ 在 R^3 上每一点都张成 R^3 的切空间，由 *Chow's* 定理知，R^3 上任两点都可由分段水平曲线连接。和 Y_1, Y_2 相对应的次黎曼流形，当 $x\neq 0$ 时，次黎曼流形的步数为 2。$x=0$ 时，次黎曼流形的步数为 $2(k+1)$。R^3 上的次黎曼结构是由 Y_1, Y_2 诱导出来的，底空间 R^2 上和 Y_1, Y_2 相应的度量是 $ds^2=(1+|x|^{4k+2})(dx_1^2+dx_2^2)$，和 Y_1, Y_2 相应的 1-形式为 $\omega=dt-2x_2|x|^{2k}dx_1+2x_1|x|^{2k}dx_2$，且有 $D=ker\omega$，则相应的 *Lagrangian* 为

$$L=\frac{1}{2}\left(1+|x|^{4k+2}\right)(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\theta(\dot{t}-2x_2|x|^{2k}\dot{x}_1+2x_1|x|^{2k}\dot{x}_2)。$$

作极坐标变换，则 *Lagrangian* 可变为

$$L=\frac{1}{2}(1+r^{4k+2})(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\theta(\dot{t}+2r^{2k+2}\dot{\varphi}) \qquad (*)$$

把(*)式代入 r,φ,t 关于的 *Euler-Lagrange* 方程化简得：

$$(1+r^{4k+2})\ddot{r}+(2k+1)r^{4k+1}\dot{r}^2=\left[r+2(k+1)r^{4k+3}\right]\dot{\varphi}^2+4(k+1)r^{2k+1}\theta\dot{\varphi} \qquad (1)$$

$$(1+r^{4k+2})r^2\dot{\varphi}+2\theta r^{2k+2}=c\ (常数) \qquad (2)$$

$$\theta=\theta_0\ (常数) \qquad (3)$$

考虑起点在原点的测地线，则有 $r(0)=0$，由(2)可得 $c=0$。从而，(2)式可化简为：

$$\dot{\varphi}=\frac{-2\theta r^{2k}}{1+r^{4k+2}} \qquad (4)$$

解(1)得 $$\dot{r}^2=\frac{4\theta^2}{\left(1+r^{4k+2}\right)^2}+\frac{c}{1+r^{4k+2}} \qquad (5)$$

当 $\dot{r}=0$ 时，取 $r=r_{max}$，则得 $c=-\dfrac{4\theta^2}{1+r_{max}^{4k+2}}\le 0$，

解得 $$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{4\theta^2}{\left(1+r^{4k+2}\right)^2}-\frac{4\theta^2}{\left(1+r^{4k+2}\right)\left(1+r_{max}^{4k+2}\right)}} \qquad (6)$$

取"+"时表示 r 从 0 增加到 r_{max}，取"−"时表示 r 从 r_{max} 减到 0。

由于 *Lagrangian*（见(*)式）关于对称变换 $(\theta,\varphi,t)\to(-\theta,-\varphi,-t)$ 是不变的，即仅需研究 $\theta>0$ 情况，$\theta<0$ 对应的解可通过把 $\theta>0$ 情况得到的解关于 x 平面做对称翻转，同时改变旋转方向(指 φ)得到。

性质 2.1.1 $\theta=0$ 时，连接 $(0,0,0)$ 和点 (x_1,x_2,t) 的测地线为 x 平面上 $(0,0,0)$ 和点 $(x_1,x_2,0)$ 之间的直线段。

证明：$\theta=0$ 时，由于 $\theta=0$，代入(4)可得 $\dot{\varphi}=0$，即 φ 为常值。 (7)

假定测地线为 $((x_1(s),x_2(s),t(s))=c(s)$，又由于 $\dot{c}(s)$ 在 Y_1, Y_2 由生成的分布里，则得到 $\dot{t}+2r^{2k+2}\dot{\varphi}=0$ (8)

将(7)代入(8)得 $\dot{t}=0$，即 t 为常值。又因为 $t(0)=0$，则 $t\equiv 0$。则连接 $(0,0,0)$ 和点 (x_1,x_2,t) 的测地线为 x 平面上 $(0,0,0)$ 和点 $(x_1,x_2,0)$ 之间的直线段，证毕。

下面求解关于 r 和 φ 的微分方程(假定 $\theta>0$)。

由(4)和(6)得 $$\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{\sqrt{r_{max}^{4k+2}-r^{4k+2}}}r^{2k}$$

假定 $\varphi(0)=\varphi$。令 $t=r^{2k+1}$，积分得

$$\varphi(r)-\varphi(0)=-\frac{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2k+1}\arcsin\left[\left(\frac{r}{r_{max}}\right)^{2k+1}\right]$$

("−"表示顺时针旋转) (9)

即：$$r=r(\varphi)=r_{max}\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right] \qquad (10)$$

这里 $\varphi_0=\varphi(0)$，且 $\varphi_m\le\varphi\le\varphi_0$，其中 $\varphi_m=\varphi_0-\dfrac{\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2(2k+1)}$。在(9)中，当 $r=r_{max}$ 时，得一角度 $w=\varphi(r_{max})-\varphi_0=-\dfrac{\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2(2k+1)}$，即在旋转 $-\dfrac{\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2(2k+1)}$ 角度后可得到到原点距离最大的点。

当 r 从 r_{max} 减小到 0 时，考虑 $\varphi_0-\dfrac{\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2k+1}\le\varphi\le\varphi_m$，同样得到(10)。

性质 2.1.2 若 $\varphi_0-\varphi\in\left[\dfrac{m\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2k+1},\dfrac{(m+1)\pi\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}{2k+1}\right]$，$m\ge 0$ 是整数。则

$$r=r(\varphi)=(-1)^m r_{max}\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right] \qquad (11)$$

将(11)代入(4)化简得：

$$\frac{d\varphi}{ds}=-2\theta\frac{r_{max}^{2k}\sin^{\frac{2k}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right]}{1+r_{max}^{4k+2}\sin^2\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right]}$$

令 $v=\dfrac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}$，对上式积分得：

$$\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}\frac{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}\left[1+r_{max}^{4k+2}\sin^2(v)\right]}{r_{max}^{2k}\sin^{\frac{2k}{2k+1}}(v)}dv=2(2k+1)\theta s。$$

由于$\dot{c}(s)$在 Y_1,Y_2 由生成的水平分布里，得到 $dt=-2r^{2k+2}d\varphi$。将(11)代入,积分得到

$$t(\varphi)-t(\varphi_0)=-2r_{\max}^{2k+2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-u)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right]du \quad (12)$$

令 $v=\dfrac{(2k+1)(\varphi_0-u)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}$,则上式化为

$$t(\varphi)-t(\varphi_0)=\frac{2r_{\max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv \quad (13)$$

若边界条件为 $r(0)=0,\varphi(0)=\varphi_0,t(0)=0,r(s)=R,\varphi(s)=\varphi_1,t(s)=t_1$ 则得到边界条件之间的关系为性质 2.1.3。

性质 2.1.3

$$\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi_1)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\frac{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}\left[1+r_{\max}^{4k+2}\sin^2(v)\right]}{r_{\max}^{2k}\sin^{\frac{2k}{2k+1}}(v)}dv=2(2k+1)\theta s \quad (14)$$

$$R^{2(k+1)}=r_{\max}^{2(k+1)}\sin^{\frac{2(k+1)}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi_1)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right] \quad (15)$$

$$t_1=\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi_1)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}r_{\max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv \quad (16)$$

$$\frac{t_1}{R^{2k+2}}=\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi_1)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\frac{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)}{\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\varphi_1)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right]}dv \quad (17)$$

$t_1>0,r\neq0$。

我们考虑连接原点 $0(0,0,0)$和点 $p(\rho,\Phi,t)$之间的测地线,边界条件可变为

$r(0)=0,\varphi(0)=\varphi_0,t(0)=0,r(s_0)=\rho,\varphi(s_0)=\Phi,t(s_0)=t$

在(13)中取 $\varphi=\Phi$,则(17)可变为

$$t=\frac{2r_{\max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\Phi)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv \quad (18)$$

在(11)中取 $\varphi=\Phi$,则(11)式可化为

$$\rho=(-1)^m r_{\max}\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)(\varphi_0-\Phi)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right] \quad (19)$$

则(18)(19)为测地线的方程,由(18)(19)组成的方程组是关于未知量 $\mu=\varphi-\Phi$ 和 $r_{\max}$ 的，方程组解($\mu,r_{\max}$)的个数等于连接原点 $0(0,0,0)$和 $p(\rho,\Phi,t)$点的测地线条数。

2.2 次黎曼测地线方程的求解和讨论

以上我们得到了测地线的方程(18)(19),且(18)(19)组成的方程组的解($\mu,r_{\max}$)的个数等于连接原点 $0(0,0,0)$和 $p(\rho,\Phi,t)$点的测地线条数,因此有必要对(18)(19)组成的方程组进行求解和讨论。记由(18)(19)组成的方程组为:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} t=\dfrac{2r_{\max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}{2k+1}\displaystyle\int_0^{\frac{(2k+1)(\varphi_0-\Phi)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv & (18)\\ \rho=(-1)^m r_{\max}\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\dfrac{(2k+1)(\varphi_0-\Phi)}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right] & (19)\end{cases}$$

令 $x=\dfrac{\varphi_0-\Phi}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}=\dfrac{\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}$,则(18)式可化为:

$$\frac{t}{r_{\max}^{2k+2}}\frac{1}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}=\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv \quad (20)$$

当 $p=0$ 时,由(18)和(19)得到

$$\frac{t}{\rho^{2k+2}}\frac{1}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}=\frac{2}{2k+1}\frac{\int_0^{(2k+1)x}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv}{\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}\left[(2k+1)x\right]}=\mu_k(x) \quad (21)$$

类似文献[1]我们可以讨论函数 $\mu_k(x)$性质。$\mu_k(x)$是奇函数,且 $\lim\limits_{x\to0}\mu_k(x)=0$。

引理 2.2.1　(i)函数 $\mu_k(x)$满足常微分方程

$\mu_k'(x)=2-2(k+1)\cot((2k+1)x)\mu_k(x)$;

(ii)若 x_c 是函数 $\mu_k(x)$的临界点,则有

$\mu_k(x_c)=\dfrac{1}{k+1}\tan((2k+1)x_c)$。

引理[1]2.2.2　若 $x_c>0$ 是函数 $\mu_k(x)$的临界点,则 $\mu_k''(x_c)>4(2k+1)>0$,因此 $\mu_k(x)$的所有正临界点都是局部极小值。

引理[2]2.2.3　$\mu_k(x)$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2k+1},\dfrac{\pi}{2k+1}\right)$上是单调增函数,且将此区间微分同胚映射成区间 R。在每一区间$\left(\dfrac{m\pi}{2k+1},\dfrac{(m+1)\pi}{2k+1}\right)$,$m=1,2\cdots$,$\mu_k(x)$有唯一的临界点 x_m,且在此区间上,$\mu_k(x)$从$+\infty$ 严格递减到 $\mu_k(x_m)$后又从 $\mu_k(x_m)$严格递增到$+\infty$。而且 $\mu_k(x_m)+q<\mu_k(x_{m+1})$,这里 $q=\dfrac{2}{2k+1}B(\dfrac{4k+3}{4k+2},\dfrac{1}{2})>0$ 和 m 无关。

应用上面引理可得到本文的两个性质。

性质 2.2.4　对每一 $r_{\max}$,(21)式有有限多解 x,由

$$x=\frac{\varphi_0-\Phi}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}=\frac{\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\ ,$$

从而对应有限多条测地线，若 r_{max} 使得 $\frac{t}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}<\mu_k(x_1)\rho^{2k+2}$，(这里 x_1 是 $\mu_k(x)$ 的第一个正临界点)，则解 x 是唯一的，从而对应唯一一条测地线。

证明：令 $y=\frac{t}{\rho^{2k+2}\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}$，由引理 3.2.3 可知对每一 r_{max}，y 和 $\mu_k(x)$ 有有限个交点，由 $x=\frac{\varphi_0-\Phi}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}=\frac{\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}$ 相应有有限个 μ，即有有限对 (r_{max},μ)，从而有有限条测地线，若 r_{max} 使得 $\frac{t}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}<\mu_k(x_1)\rho^{2k+2}$，则解 x 是唯一的，即只有一条测地线。

性质 2.2.5 若 $t<\mu_k(x_1)\rho^{2k+2}\sqrt{1+\rho^{4k+2}}$，则原点和点 $p(\rho,\Phi,t)$ 之间至多有一条测地线连接。

证明：因为

$$\frac{t}{\rho^{2k+2}\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\le\frac{t}{\rho^{2k+2}\sqrt{1+\rho^{4k+2}}}<\mu_k(x_1)$$

由性质 3.2.4 可知，此时至多有一条测地线。

下面讨论方程组 (I) 在给定一对数 (p,t)，其中 p 充分大，t 为任意大于 0 的数的情况下解的个数。

因(18)等价于(20)，即讨论方程组

$$(II)\begin{cases}\rho=(-1)^m r_{max}\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right] & (19)\\ \frac{t}{r_{max}^{2k+2}}\frac{1}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}=\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv & (20)\end{cases}$$

在 $\rho\to\infty$ 时解的个数问题。

因 $\rho\to\infty$，由(19)得 $r_{max}\to\infty$，下面分情况讨论：

(i)若 μ 有界，则 $\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\sim\frac{(2k+1)\mu}{r_{max}^{2k+1}}\to0\ (r_{max}\to\infty)$，从而有 $\sin^{\frac{1}{2k+1}}\left[\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\right]\sim\frac{\sqrt[2k+1]{(2k+1)\mu}}{r_{max}}$，即(19)式右边为 $\sqrt[2k+1]{(2k+1)\mu}\ (r_{max}\to\infty)$ 是有界的，但左边 $\rho\to\infty$，矛盾。

(ii)若 μ 无界，即 $\mu\to\infty$ 时，因考虑测地线顺时针旋转，则有 $\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\in(0,+\infty)$

可分下面三种情况讨论：

(A) $\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$，有(20)式右边为

$$\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv\ge\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv$$

$=\frac{1}{2k+1}B\left(\frac{4k+3}{4k+2},\frac{1}{2}\right)$，由于在数对 (ρ,t) 的给定中，只要求 $\rho\to\infty$，t 为任意大于 0 的数，因此若取 t 为有界的数，则由 $r_{max}\to\infty$，(20)式左边趋于 0，矛盾。

(B) $\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\in\left(\varepsilon_0,\frac{\pi}{2}\right)$，其中 ε_0 为一固定的充分小的数，根据中值定理则有

$$\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv\ge\frac{2}{2k+1}\int_0^{\varepsilon_0}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(\theta\varepsilon_0)dv,$$

其中 θ 为(0,1)之间的一常数，因此若取 t 为有界的数，则由 $r_{max}\to\infty$，总有

$$\lim_{r_{max}\to\infty}\frac{\frac{t}{r_{max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}{\frac{2}{2k+1}\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv}$$

$$\le\lim_{r_{max}\to\infty}\frac{\frac{t}{r_{max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}{\frac{2}{2k+1}\varepsilon_0\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}\left(\frac{1}{r_{max}}\varepsilon_0\right)}$$

$$\le\lim_{r_{max}\to\infty}\frac{\frac{t}{r_{max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}{\frac{2}{2k+1}\varepsilon_0\sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(\theta\varepsilon_0)}$$

$$=\lim_{r_{max}\to\infty}\frac{\frac{t}{r_{max}^{2k+2}r_{max}^{2k+1}}}{\frac{2}{2k+1}\varepsilon_0\left(\frac{1}{r_{max}}\right)^{\frac{2k+2}{2k+1}}(\varepsilon_0)^{\frac{2k+2}{2k+1}}}=0$$

即得到(20)式不成立，亦即(18)式不成立，从而方程组(I)无解。

(C) $\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\to0$，因为 $r_{max}\to\infty$，$\mu\to\infty$ 但

$$\lim_{\substack{r_{max}\to\infty\\ \mu\to\infty\\ \frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}\to0}}\frac{\frac{1}{r_{max}^{2k+1}}}{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{max}^{4k+2}}}}=0$$

，即得到

$$\lim_{\substack{r_{\max}\to\infty \\ \mu\to\infty \\ \frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\to 0}} \frac{\dfrac{t}{r_{\max}^{2k+2}\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}}{\dfrac{2}{2k+1}\displaystyle\int_0^{\frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}} \sin^{\frac{2k+2}{2k+1}}(v)dv}$$

$$=\lim_{\substack{r_{\max}\to\infty \\ \mu\to\infty \\ \frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\to 0}} \frac{\dfrac{t}{r_{\max}^{2k+2}r_{\max}^{2k+1}}}{\dfrac{2}{2k+1}\dfrac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\left[\dfrac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\right]^{\frac{2k+2}{2k+1}}}$$

$$=\lim_{\substack{r_{\max}\to\infty \\ \mu\to\infty \\ \frac{(2k+1)\mu}{\sqrt{1+r_{\max}^{4k+2}}}\to 0}} \frac{\dfrac{t}{r_{\max}^{2k+2}r_{\max}^{2k+1}}}{\dfrac{2}{2k+1}\dfrac{(2k+1)\mu}{r_{\max}^{2k+1}}\dfrac{[(2k+1)\mu]^{\frac{2k+2}{2k+1}}}{r_{\max}^{2k+2}}}=0$$

即得到(20)式不成立，亦即(18)式不成立，从而方程组(I)无解。

综上，方程组(I)$\rho\to\infty$ 在时无解，即此时无正规测地线存在。

定理 2.2.6　如果ρ 充分大，则连接原点和适当远点 $p(x,t)$的次黎曼测地线为奇异测地线，这里 $p=|x|$，且 $t\neq 0$。

参考文献:

[1]O.Calin,Der-Chen Chang,and Peter Greiner,On a step 2(k+1)sub-Riemannian Manifold,[J].The Journal of Geometric Analysis, 2004,14(1):12-20.

[2]Beals,R.,Gaveau,B.and Greiner,P.C.,Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups,[J].Math.Pures Appl, 2000, 79(7),633-689.

[3]O.Calin,Geodesics on a Certain Step 2 Sub-riemannian Manifold,[J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2002,22:317-339.

[4]Peter Greiner and O.Calin,On sub-Riemannian Geodesics, Analysis and Applications, [J]. 2003,1(3):289-350.

责任编辑：胡德明

A Study on Geodesics of a Certain Sub-Riemannian Manifolds

Zhang Xuehua

(Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan 245021, China)

Abstract: This paper structures a certain sub-Riemannian manifold M.D.G, and proves that on the sub-Riemannian manifold there exists at least one abnormal geodesic connecting the origin and a distant point.

Key words: sub-Riemannian manifold; step; normal geodesic; abnormal geodesic