阶的估计法在判定无穷积分敛散性问题中的应用

徐松林，王龙奎
（安徽建筑工业学院 数理系，安徽 合肥 230601）

摘 要：证明了二个运用阶的估计法判定无穷积分敛散性的判定定理，并据此去解决一些由比较判别法不易判定的无穷积分敛散性问题，显示了阶的估计法在这方面的优越性。

关键词：无穷积分；阶的估计法；比较判别法。

中图分类号：O172.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-447X(2009)03-0017-03

1 引 言

众所周知，判定无穷积分敛散性问题有一些常用判别法则，其中无穷积分的比较判别法可谓是我们的重要手段之一。如要运用这一方法，那么能否迅速寻找到一个适当的比较对象就成了解决问题的关键，但此法本身并没有为我们揭示应当如何寻找到一个适当的比较对象。从这个角度来说，与其说它是种审敛方法，还不如说它只是种审敛原理。为了寻找到一个适当的比较对象，我们可以对被积函数首先进行阶估计，然后将估计所得与本文中提供的判定定理的条件相比较，从而迅速地得出原无穷积分敛散性的结论。

2 定 理

关于一些记号的说明：

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为任意函数，其中 $g(x)$ 恒为正值。当 $x\to a$ 时（a 可以是 0，∞ 或某一确定常数），

(i)若有 $f(x)/g(x)\to 0$，则记作 $f(x)=O(g(x))$，特别地 $f(x)=O(1)$，即表示 $f(x)\to 0$；

(ii)若有 $f(x)/g(x)\to 1$，则记作 $f(x)\sim g(x)$；

(iii)若有 $|f(x)|/g(x)<A$，则记作 $f(x)=O(g(x))$，特别地 $f(x)=O(1)$，即表示 $|f(x)|\le A$ 有界。

(iv)若有 $f(x)/g(x)\to B\neq 0$，则记作 $f(x)=O(g(x))$，特别地 $f(x)=O(1)$，即表示 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$。

2.1 引理 1[2]

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty]$ 上的连续函数 $(a>0)$，则

(i)如果 $f(x)=O(\frac{1}{x^p})$（其中 $p>0$），$x\to\infty$，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都收敛；

(ii)如果 $f(n)=\overline{O}(\frac{1}{x^p})$（其中 $p\le 1$），$x\to\infty$，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都发散。

2.2 定理 1

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 $(a>0)$，则

(i)如果 $f(x)=O(\frac{1}{x\ln^d x})$ $(d>1)$，$x\to\infty$，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都收敛；

(ii)如果 $f(x)=\overline{O}(\frac{1}{x\ln^d x})$ $(d\le 1)$，$x\to\infty$，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都发散。

2.3 定理2

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,+\infty]$ 上的连续函数 $(a>0)$，则

(i)如果 $f(x)=O(\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d})(d>1)$，$x\to\infty$，则

收稿日期：2009-01-29
基金项目：安徽建筑工业学院硕博科研基金资助(2006110103)
作者简介：徐松林(1975-)，安徽泾县人，安徽建筑工业学院数理系讲师，研究方向为概率论与数理统计。

$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都收敛；

(ii)如果 $f(x)=\bar{O}(\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d})(d\le 1)$，$x\to\infty$，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 都发散。

鉴于证明过程的相似性，现只就定理 2 加以论证如下：

证：(i)由 $f(x)=O(\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d})(d>1)$，$x\to\infty$，

知：存在正常数 A，使得当 x 充分大时，就有

$$|f(x)|\le A\cdot\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d};$$

为证明无穷积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，只需证 $\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}$ 收敛即可，

而 $\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}=\int_N^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}$

$$=\int_N^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^d}=[\frac{1}{(1-d)(\ln\ln x)^{d-1}}]_{x=N}^{+\infty}$$

显见当 d>1 时，$\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}$ 是收敛的，所以 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也是收敛的，

进而由无穷积分绝对收敛与条件收敛的关系知：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也是收敛的。

证：(ii)由 $f(x)=\bar{O}(\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d})(d\le 1)$，$x\to\infty$，这表明当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 与 $\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}(d\le 1)$ 是同阶无穷小，所以广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}(d\le 1)$ 是同敛散的(其中 N 为充分大的正常数)。

同理如(i)可见当 d≤1 时，$\int_N^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^d}$ 是发散的，所以 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也是发散的。

记 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 分别为 $f(x)$ 的正部与负部，则由 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{+\infty}f^+(x)dx-\int_a^{+\infty}f^-(x)dx$ 知：$\int_a^{+\infty}f^+(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f^-(x)dx$ 至少有一个发散，再由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx=\int_a^{+\infty}f^+(x)dx+\int_a^{+\infty}f^-(x)dx$ 知：$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 是发散的。

3 应 用

以下就用如上的几个定理来通过对无穷积分的被积函数的阶进行估计，进而判定原无穷积分的敛散性。

3.1 命题 1：无穷积分 $\int_{10}^{+\infty}(\ln\ln x)^{-\ln x}dx$ 是收敛的

证：由 $f(x)=(\ln\ln x)^{-\ln x}=e^{-\ln x\cdot\ln\ln\ln x}$

$=(e^{-\ln x})^{\ln\ln\ln x}=\frac{1}{x^{\ln\ln\ln x}}<\frac{1}{x^2}$ (当 $lnlnlnx$>2 时)，

即 $f(x)=O(\frac{1}{x^2})$，$(x\to 8)$，所以由引理 1(i)可知 $\int_{10}^{+\infty}(\ln\ln x)^{-\ln x}dx$ 收敛。

3.2 命题 2：无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\ln(1+x)}dx$ 是发散的

证：由 $f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\ln(1+x)}=\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(1+x)}$

$$=(\frac{1}{x}+O(\frac{1}{x^2}))\cdot\frac{1}{\ln(1+x)}\sim\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}(x\to\infty),$$

即 $f(x)\sim\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}(x\to\infty)$ 也即 $f(x)=\bar{O}(\frac{1}{x\ln x})(x\to 8)$，从而由定理 1(ii)可知原无穷积分发散。

3.3 命题 3：无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x(1-\cos^{-1}x)dx}{\ln(x+1)[\ln\ln(x+2)]^2}$ 收敛

证：由 $f(x)=\frac{x(1-\cos^{-1}x)}{\ln(x+1)[\ln\ln(x+2)]^2}$

$$=\frac{x\cdot 2(\sin^{-1}2x)^2}{\ln(x+1)[\ln\ln(x+2)]^2}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^2}$$

即 $f(x)=O(\frac{1}{x\ln x\cdot(\ln\ln x)^2})$，$(x\to 8)$，

据定理 2(i)知原级数收敛。

3.4 命题 4：设有无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^\gamma}{a+x^\alpha\cdot|\sin^\beta x|}dx$ (其中 $a,\alpha,\beta,\gamma>0$)，则当 $\alpha>(1+\beta)(1+\gamma)$ 时，此无穷积分收敛

证：(i)令 $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一单调递减正项数列，且不妨暂取 $\delta_k=k^{-u}$(其中 $u>1+\gamma$，而 u 的精确值待定)。

记：$\int_0^{+\infty}\frac{x^\gamma}{a+x^\alpha\cdot|\sin^\beta x|}dx$

$$=\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{\pi-\delta_1}f(x)dx+\sum_{k=1}^{+\infty}u_k+\sum_{k=1}^{+\infty}v_k$$

(其中 $u_k=\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k}f(x)dx$ 且 $v_k=\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}}f(x)dx$)

为证原积分收敛，只需 $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$ 与 $\sum_{k=1}^{+\infty}v_k$ 同时收敛即可，现下来考察它们各自的敛散性。

由 $u_k=\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k}f(x)dx\le\int_{k\pi-\delta_k}^{k\pi+\delta_k}\frac{x^\gamma}{a}dx\le\frac{1}{a}(k\pi+\delta_k)^\gamma\cdot2\delta_k$

$=\frac{2}{a}(k\pi+\delta_k)^\gamma\cdot k^{-u}=\overline{O}(\frac{1}{k^{u-\gamma}})(k\to8)$，

因 $u>1+\gamma,\Rightarrow u-\gamma>1$，据引理 1(i)对应的无穷级数形式知：$\sum_{k=1}^{+\infty}\overline{O}(\frac{1}{k^{u-\gamma}})<+\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$ 收敛；

而 $v_k=\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_{k+1}}f(x)dx\le\int_{k\pi+\delta_k}^{(k+1)\pi-\delta_k}\frac{x^\gamma dx}{a+(k\pi)^\alpha|\sin[(k+1)\pi-\delta_{k+1}]|^\beta}$

$$\Rightarrow v_k\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^\gamma dx}{a+(k\pi)^\alpha|\sin[(k+1)\pi-\delta_{k+1}]|^\beta}$$

$$\Rightarrow v_k\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^\gamma dx}{a+(k\pi)^\alpha|\sin\delta_{k+1}|^\beta}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^\gamma dx}{a+(k\pi)^\alpha|\delta_{k+1}|^\beta}$$

$$\Rightarrow v_k\le\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x^\gamma dx}{a+(k\pi)^\alpha(k+1)^{-u\beta}}=\overline{O}(\frac{1}{k^{\alpha-u\beta-\gamma}})$$

同理为了保证 $\sum_{k=1}^{+\infty}v_k$ 收敛，只需取一适当的 u 值使得 $\alpha-u\beta-\gamma>1$ 即可，这一点是可以办到的。

因为 $\alpha>(1+\beta)(1+\gamma)$，可令 $t=\alpha-(1+\beta)(1+\gamma)>0$，而取 $u=1+\gamma+\frac{t}{2\beta}$，

则有 $\alpha-u\beta-\gamma-1=\alpha-(1+\gamma+\frac{t}{2\beta})\beta-(1+\gamma)$

$=\frac{t}{2}>0\Rightarrow\alpha-u\beta-\gamma>1\}$

综合上述知：当 $\alpha>(1+\beta)(1+\gamma)$ 时，原无穷积分收敛。

4 结　语

显然上述几个无穷积分的敛散性都无法直接用比较判别法来判定，因为事先我们根本不知道应取怎样的比较对象，而如上运用阶的估计法来判定却是比较方便的，这显示了阶的估计法在定性判定方面的优越性。在运用阶的估计法来判定无穷积分的敛散性时，第一步通常是要对无穷积分的被积函数进行“换底”，其目的就在于将它同的阶作比较。而运用此较法的关键正在于能否对无穷积分的阶进行迅速而准确的判定，如果能做到这一点，那么判定的过程将大为简化。

参考文献：

[1]徐森林，金亚东，薛春华.数学分析[M].北京：清华大学出版社，2007:409–411.

[2]吉米多维奇·数学分析习题集题解(3)[M].济南：山东科学技术出版社，2005:341–342.

责任编辑：胡德明

The Application of Order–estimate Method in Determining Convergence and Divergence of Infinite Integration

Xu Songlin, Wang Longkui

(Anhui Institute Of Architecture & Industry, Hefei 230601, China)

Abstract: This article mainly verifies two determine–theorems in the order–estimate method used for determining convergence and divergence of infinite integration and employs the order–estimate method to determine convergence and divergence of infinite integration which is not easy to be determined by comparison tests to show the merits of order–estimate method.

Key words: infinite integration; order–estimate method; comparison test