多延迟微分方程多步Runge-Kutta法的散逸性

姚金然[1], 刘建国[2]
(1.黄山学院 数学系, 安徽 黄山 245041; 2.中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410075)

摘　要: 将(k,ℓ)代数稳定的多步Runge-Kutta法应用于多延迟微分方程，讨论了该方法的数值散逸性，并获得了(k,ℓ)代数稳定的多步Runge-Kutta法的有限维散逸性结论。

关键词: 多延迟微分方程; 多步Runge-Kutta法; (k,ℓ)代数稳定; 散逸性
中图分类号: O241.8　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1672-447X(2009)03-0013-04

0 引言

科学与工程的许多问题具有散逸性, 即系统具有一有界吸引集, 从任意初始条件出发的解经过有限时间后进入该吸引集并随后保持在里面。散逸性研究是系统研究中的重要课题, 当数值求解此类系统时自然希望数值方法能保持系统的该重要特征。1994年, Humphries A R [1] 等首次研究了Runge-Kutta方法对有限维系统的散逸性。2000年, 黄承明等 [2-5] 研究了延迟动力系统的散逸性, 并获得了Runge-Kutta方法、θ-方法、单支方法的数值散逸性结论。2001年, 余越昕等[6]研究了多延迟微分方程线性θ-方法的数值散逸性。2007年, 王素霞等[7]证明了Runge-Kutta方法继承了该方程的散逸性结论。本文进一步研究了多步Runge-Kutta法关于此方程的数值散逸性, 并获得了(k,ℓ)一代数稳定的多步Runge-Kutta法的有限维散逸性结论。

1 应用于多延迟微分方程的多步Runge-Kutta法

设H是一实或复的希尔伯特空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$是$H$中的内积, $\|\cdot\|$是该内积导出的范数, X是H中稠密的连续嵌入子空间。考虑双延迟微分方程

$$\begin{cases} y'(t)=f\left(y(t),y(t-\tau_1),y(t-\tau_2)\right),\ t\ge 0 \\ y(t)=\varphi(t),\ t\le 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中τ_1,τ_2是一正常数, $\varphi(t)$是连续函数, $f:X\times X\times X\to H$是一局部Lipschitz连续函数, 并满足以下条件:

$$\mathrm{Re}\langle u,f(u,v_1,v_2)\rangle\le\gamma+\alpha\|u\|^2+\beta_1\|v_1\|^2+\beta_2\|v_2\|^2,\ u,v_1,v_2\in X \tag{1.2}$$

其中$\gamma,\alpha,\beta_1,\beta_2$是常数。

定义1.1[2]　方程(1.1)称为是散逸的, 如果存在一有界集$B\subset H$, 使得对所有闭集$\Phi\subset H$, 存在一时间$t_0=t_0\Phi$, 使得对所有包含于Φ中的初始函数$\varphi(t)$, 对所有$t\geq t_0$, 相应的解$y(t)$包含于B。B称为H中的吸引集。

命题1.2[2]　假设某函数满足(1.2), 则$\gamma\geq 0,\beta_1\geq 0,\beta_2\geq 0$。

定理1.3　设$y(t)$是方程(1.1)的解, 且$\alpha+\beta_1+\beta_2<0$, 则对任意$\varepsilon>0$, 存在$t=t^*(\bar\Phi,\varepsilon)$, $\bar\Phi=\sup\limits_{t\le 0}\|\Phi(t)\|$, 使得当$t=t^*$时, 有

$$\|y(t)\|^2<\frac{\gamma}{-(\alpha+\beta_1+\beta_2)}+\varepsilon\ 。$$

所以系统是散逸的, 对任意$\varepsilon>0$, 开球$B=B(\sqrt{-\gamma/(0,\alpha+\beta_1+\beta_2)+\varepsilon}$是其吸引集。

收稿日期: 2009-01-30
基金项目: 黄山学院自然科学基金资助(2008xkjq005).
作者简介: 姚金然(1982-), 山东临沂人, 黄山学院数学系教师, 硕士, 研究方向为常微分方程数值解;
刘建国(1983-), 湖南娄底人, 硕士, 研究方向为常微分方程数值解。

考虑求解系统(1.1)的多步 Runge-Kutta 法:

$$Y_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}y_{n+j-1}+h\sum_{j=1}^{s}b_{ij}\cdot f\left(Y_j^{(n)},\bar{Y}_j^{(n)},\tilde{Y}_j^{(n)}\right),$$
$$i=1,2,\cdots,s \tag{1.3}$$

$$y_{n+r}=\sum_{j=1}^{r}\theta_j y_{n+j-1}+h\sum_{j=1}^{s}\gamma_j\cdot f\left(Y_j^{(n)},\bar{Y}_j^{(n)},\tilde{Y}\right), \tag{1.4}$$

其中$h>0$是步长,系数a_{ij}, b_{ij}, θ_j 和γ_j是实常数,y_n是系统真解在$t_n=nh$的值$y(t_n)(n=0,1,2,\cdots)$的逼近,$Y_j^{(n)}$逼近$y(t_n+c_jh)$,$\bar{Y}_j^{(n)}$和$\tilde{Y}_j^{(n)}$分别逼近$y(t_n+c_jh-)\tau_1$和$y(t_n+c_jh-)\tau_2$。并假设$0\le c_i\le r(i=1,2,\cdots s)$,

设$\tau_1=(m_1-\delta_1)h$,$\tau_2=(m_2-\delta_2)h$,m_1,m_2为正整数,$\delta_1,\delta_2\in[0,1]$。$\bar{Y}_j^{(n)}$,$\tilde{Y}_j^{(n)}$可由下面线性插值程序获得:

$$\bar{Y}_j^{(n)}=\delta_1Y_j^{(n-m_1+1)}+(1-\delta_1)Y_j^{(n-m_1)},\ j=1,2,\cdots,s \tag{1.5}$$

$$\tilde{Y}_j^{(n)}=\delta_2Y_j^{(n-m_2+1)}+(1-\delta_2)Y_j^{(n-m_2)},\ j=1,2,\cdots,s \tag{1.6}$$

其中当 $t_n+c_jh-\tau_1\le 0, t_n+c_jh-\tau_2\le 0$ 时,

$$\bar{Y}_j^{(n)}=\varphi\left(t_n+c_jh-\tau_1\right),$$
$$\tilde{Y}_j^{(n)}=\varphi\left(t_n+c_jh-\tau_2\right),\ j=1,2,\cdots,s\ 。$$

多步 Runge-Kutta 法(1.3), (1.4)可以写成 s 级 r 值一般线性方法的形式,令

$$C_{11}=[b_{ij}]\in R^{s\times s},\ C_{12}=[a_{ij}]\in R^{s\times r} \tag{1.7}$$

$$C_{21}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\\ \gamma_1&\cdots&\gamma_s\end{bmatrix}\in R^{r\times s},$$

$$C_{22}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ 0&0&0&0&1\\ \theta_1&\theta_2&\cdots&\theta_{r-1}&\theta_r\end{bmatrix}\in R^{r\times r} \tag{1.8}$$

对任意给定 $k\times\ell$ 的实矩阵$Q=[q_{ij}]$,定义相应的线性算子 $Q:X^l\to X^k$,

$$QU=V=(v_1,v_2,\cdots,v_k)^T\in X^k,$$
$$U=(u_1,u_2,\cdots,u_l)^T\in X^l,\ u_j\in X,$$

其中 $v_i=\sum_{j=1}^{l}q_{ij}u_j,\ i=1,2,\cdots,k$。

多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)写成 s 级 r 值一般线性方法的形式为:

$$Y^{(n)}=hC_{11}F\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{12}y^{(n-1)} \tag{1.9}$$

$$y^{(n)}=hC_{21}F\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{22}y^{(n-1)} \tag{1.10}$$

其中 $Y^{(n)}=\left(Y_1^{(n)},Y_2^{(n)},\cdots,Y_s^{(n)}\right)^T$,

$$\bar{Y}^{(n)}=\left(\bar{Y}_1^{(n)},\bar{Y}_2^{(n)},\cdots,\bar{Y}_s^{(n)}\right)^T,$$
$$\tilde{Y}^{(n)}=\left(\tilde{Y}_1^{(n)},\tilde{Y}_2^{(n)},\cdots,\tilde{Y}_s^{(n)}\right)^T,$$
$$y^{(n)}=\left(y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{n+r}\right)^T,$$
$$F\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)=\left(f\left(Y_1^{(n)},\bar{Y}_1^{(n)},\tilde{Y}_1^{(n)}\right),\right.$$
$$\left.f\left(Y_2^{(n)},\bar{Y}_2^{(n)},\tilde{Y}_2^{(n)}\right),\cdots,f\left(Y_s^{(n)},\bar{Y}_s^{(n)},\tilde{Y}_s^{(n)}\right)\right)^T。$$

Runge-Kutta 法及多步配置方法都可视为多步 Runge-Kutta 法(1.3), (1.4)的特例。

定义 1.4 假设 ℓ 是实常数,H 是有限维空间。多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)称为是有限维 $GD(\ell)$-散逸的,如果该方法应用于系统(1.1)且满足 $h(\alpha+\beta_1+\beta_2)<\ell$ 时,存在常数 r,使得对任意初值 $Y^{(-m)},\cdots Y^{(-1)}$ 和 $y_0,y_1\cdots,y_{r-1}$,存在仅依赖于初值的 n_0 有

$$\|y_n\|\le r,\ n\ge n_0 \tag{1.11}$$

特别地,$GD(0)$-散逸的方法简称为 GD-散逸。

定义 1.5[8] 设 k,ℓ 是实常数。多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)称为是(k,ℓ)-代数稳定的,如果存在一个实对角矩阵 $D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_s)\ge 0$ 和实对称矩阵 $G>0$,使得矩阵 $M=[M_{ij}]$非负定,其中

$$M=\begin{bmatrix}kG-C_{22}^TGC_{22}-2lC_{12}^TDC_{12} & C_{12}^TD-C_{22}^TGC_{21}-2lC_{12}^TDC_{11}\\ DC_{12}-C_{21}^TGC_{22}-2lC_{11}^TDC_{12} & C_{11}^TD+DC_{11}-C_{21}^TGC_{21}-2lC_{11}^TDC_{11}\end{bmatrix} \tag{1.12}$$

特别地,$(1,0)$-代数稳定的方法简称为代数稳定。

定义 1.6[5] 多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)称为是级-可约(stage-reducible),如果对非空指标集 $T\subset\{1,2\cdots,s\}$,$\gamma_j=0,j\in T;b_{ij}=0,i\notin T,j\in T$。否则称为是级-不可约(*stage-irreducible*)。

如果方法是级-可约的,则该方法等价于一个比它低级的另一个方法。接下来,我们介绍步-可约,同样的,如果方法步-可约,则该方法可以写成更低步的方法。

定义 1.7[5] 多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)称为是步-可约(step-reducible),如果多项式$\{\sigma_i(x)\}_{i=0}^{s}$有公因子,其中 $\sigma_0(x)=x^r-\sum_{j=1}^{r}\theta_jx^{j-1}$,

$$\sigma_i(x)=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}x^{j-1},\ i=1,\cdots,s$$

否则称为是步-不可约(*step-irreducible*)。

定义 1.8[5] 多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)称为是可约的,如果该方法是级-可约或者步-可约。

对任意 $p\times p$ 非负实对称矩阵 $Q=[q_{ij}]$,在 H^p 上定义伪内积:$\langle Y,Z\rangle_Q=\sum_{i,j=1}^{p}q_{ij}\langle Y_i,Z_j\rangle$,

$$Y=\left(Y_1,\cdots,Y_p\right)^T\in H^p,\ Z=\left(Z_1,\cdots,Z_p\right)^T\in H^p$$

以及相应伪范数: $\|Y\|_Q=\langle Y,Y\rangle_Q^{1/2}$。

显然地，当 D 正定时，它们就是 H^p 上相应的内积及范数。

我们假设方法(1.9)，(1.10)总是存在唯一解 $(Y_1^{(n)},\cdots Y_s^{(n)})^T\in X^s$。

2　有限维散逸性分析

对应用于双延迟微分方程的多步 *Runge-Kutta* 法的有限维散逸性进行分析。假设 $H=X=C^N$。

引理 2.1[5]　假设 $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^{q}$ 是次数严格小于 q 的多项式空间 p^{q-1} 中一组多项式基，则方程组 $\xi_i(E)y_n=b_i, b_i\in C^N, i=1,2\cdots,q$，存在唯一解 $y_n,\cdots,y_{n+q-1}$ 且存在不依赖 b_i 的常数 v，使得

$$\max_{0\le i\le q-1}\|y_{n+i}\|\le \upsilon\max_{0\le i\le q}\|b_i\|_0$$

引理2.2[5]　假设多步 *Runge-Kutta* 法(1.3)，(1.4)步-不可约，则存在实常数 $v_i, i=1,\cdots,s$ 使得 $\sigma_0(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{s}v_i\sigma_i(x)$ 无公因子。

定理 2.3　假设多步 *Runge-Kutta* 法(1.3)，(1.4)是步-不可约且(k,ℓ)-代数稳定的，$D>0, k\le1$，则该方法是有限维 $GD(\ell)$-散逸的。

证明　假设多步 Runge-Kutta 法 (1.3)，(1.4)是(k,ℓ)代数稳定的，由定义 1.5 容易得到：

$$\|y^{(n)}\|_G^2-k\|y^{(n-1)}\|_G^2-2\mathrm{Re}\left\langle Y^{(n)},hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)\right\rangle_D+2l\|Y^{(n)}\|_D^2$$
$$=\left\langle C_{21}hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{22}y^{(n-1)},G\left(C_{21}hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{22}y^{(n-1)}\right)\right\rangle$$
$$+\left\langle y^{(n-1)},-kGy^{(n-1)}\right\rangle+2\mathrm{Re}\left\langle C_{11}hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{12}y^{(n-1)},\right.$$
$$\left.-DhF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)\right\rangle+\left\langle C_{11}hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{12}y^{(n-1)},\right.$$
$$\left.2lD\left(C_{11}hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)+C_{12}y^{(n-1)}\right)\right\rangle$$
$$=-\left\langle\left(y^{(n-1)},hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)\right),M\left(y^{(n-1)},hF\left(Y^{(n)},\bar{Y}^{(n)},\tilde{Y}^{(n)}\right)\right)\right\rangle\le0 \quad (2.1)$$

由(1.2)及 $k\le1$ 可得

$$\|y^{(n)}\|_G^2\le\|y^{(n-1)}\|_G^2+2hd\gamma+2(\alpha h-l)\|Y^{(n)}\|_D^2+2h\beta_1\|\bar{Y}^{(n)}\|_D^2+2h\beta_2\|\tilde{Y}^{(n)}\|_D^2$$
$$\le\|y^{(-1)}\|_G^2+2(n+1)hd\gamma+2(\alpha h-l)\cdot\sum_{j=0}^{n}\|Y^{(j)}\|_D^2+2h\beta_1\sum_{j=0}^{n}\|\bar{Y}^{(j)}\|_D^2+2h\beta_2\|\tilde{Y}^{(n)}\|_D^2 \quad (2.2)$$

其中 $d=\sum_{j=1}^{s}d_j$。

由(1.5)得

$$\|\bar{Y}^{(j)}\|_D^2\le\delta_1^2\|Y^{(j-m_1+1)}\|_D^2+(1-\delta_1)^2\|Y^{(j-m_1)}\|_D^2+\delta_1(1-\delta_1)\left(\|Y^{(j-m_1+1)}\|_D^2+\|Y^{(j-m_1)}\|_D^2\right)$$
$$=\delta_1\|Y^{(j-m_1+1)}\|_D^2+(1-\delta_1)\|Y^{(j-m_1)}\|_D^2 \quad (2.3)$$

同理，由(1.6)得

$$\|\tilde{Y}^{(j)}\|_D^2=\delta_2\|Y^{(j-m_2+1)}\|_D^2+(1-\delta_2)\|Y^{(j-m_2)}\|_D^2$$

记 $\tau=\max\{\tau_1,\tau_2\}, m=\max\{m_1,m_2\}$，由 $\beta_1\ge0,\beta_2\ge0$ 及(2.2)可得

$$\|y^{(n)}\|_G^2\le\|y^{(-1)}\|_G^2+2(n+1)hd\gamma+2(\alpha h-l)\cdot\sum_{j=0}^{n}\|Y^{(j)}\|_D^2$$
$$+2h\beta_1\sum_{j=-m}^{n-m}\left(\delta_1\|Y^{(j+1)}\|_D^2+(1-\delta_1)\|Y^{(j)}\|_D^2\right)$$
$$+2h\beta_2\cdot\sum_{j=-m}^{n-m}\left(\delta_2\|Y^{(j+1)}\|_D^2+(1-\delta_2)\|Y^{(j)}\|_D^2\right)$$
$$\le\|y^{(-1)}\|_G^2+2(n+1)hd\gamma+2\cdot[h(\alpha+\beta_1+\beta_2)-l]\sum_{j=0}^{n}\|Y^{(j)}\|_D^2$$
$$+2(\beta_1+\beta_2)\tau\max_{-m\le i\le-1}\|Y^{(i)}\|_D^2 \quad (2.4)$$

令 λ_1 表示矩阵 G 的最大特征值，

$$\alpha_1=\max_{0\le i\le r-1}\|y_i\|^2,\ \alpha_2=\max_{-m\le i\le r-1}\|Y_i\|_D^2,$$
$$R_1=\max(\alpha_1,\alpha_2),\ \mu=l-h(\alpha+\beta_1+\beta_2). \quad (2.5)$$

则，$\mu>0$ 且有

$$\|y^{(n)}\|_G^2+2\mu\sum_{j=0}^{n}\|Y^{(j)}\|_D^2\le(r\lambda_1+2(\beta_1+\beta_2)\tau)R_1+2(n+1)hd\gamma \quad (2.6)$$

当 $\gamma=0$ 时，由(2.6)及 $\mu>0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|Y^{(n)}\|_D=0,\ \lim_{n\to\infty}\|\bar{Y}^{(n)}\|_D=0\ \lim_{n\to\infty}\|\tilde{Y}^{(n)}\|_D=0 \quad (2.7)$$

则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $n_0(R_1,\varepsilon)>0$，使得

$$\|Y_j^{(n)}\|_D\le\varepsilon,$$
$$\|\bar{Y}_j^{(n)}\|_D\le\varepsilon,$$
$$\|\tilde{Y}^{(n)}\|_D<\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,s,\ n\ge n_0. \quad (2.8)$$

由(1.3)，(1.4)可得

$$\|\sigma_i(E)y_n\|\le\left\|\sum_{j=1}^{r}a_{ij}y_{n+j-1}\right\|\le hL\sum_{j=1}^{s}|b_{ij}|+\varepsilon,$$
$$i=1,\cdots,s,\ n\ge n_0 \quad (2.9)$$

$$\|\sigma_0(E)y_n\|\le\left\|y_{n+r}-\sum_{j=1}^{r}\theta_jy_{n+j-1}\right\|\le hL\sum_{j=1}^{s}|\gamma_j|,\ n\ge n_0 \quad (2.10)$$

其中 $L=\sup\limits_{\substack{\|u\|\le\varepsilon,\|v_1\|\le\varepsilon\\ \|v_2\|\le\varepsilon}}\|f(u,v_1,v_2)\|,\ u,v_1,v_2\in X$。

由引理 2.2 可知，存在实常数 $v_i, i=1,\cdots,s$，使得 $\sigma_0(x)$ 和 $\sum_{i=1}^{s}v_i\sigma_i(x)$ 无公因子，则有

$$\left\|\sum_{i=1}^{s}v_i\sigma_i(E)y_n\right\|\le\sum_{i=1}^{s}|v_i|\left[hL\sum_{j=1}^{s}|b_{ij}|+\varepsilon\right],\ n\ge n_0 \quad (2.11)$$

进而得到 $\left\|\left[\sigma_0(E)-\sum_{i=1}^{s}v_i\sigma_i(E)\right]y_n\right\|\le hL\sum_{j=1}^{s}|\gamma_j|$

$$+\sum_{i=1}^{s}|v_i|\left[hL\sum_{j=1}^{s}|b_{ij}|+\varepsilon\right],\ n\geq n_0 \tag{2.12}$$

另外，因为 $\sigma_0(x)$ 和 $\sigma_0(x)-\sum_{i=1}^{r}v_i\sigma_i(x)$ 互素，所以

$$\left\{x^i\sigma_0(x),\ x^i\left[\sigma_0(x)-\sum_{i=1}^{s}v_i\sigma_i(x)\right];i=1,\cdots,r-1\right\}$$

是多项式空间 p^{2r-1} 的一组基。

由(2.9),(2.10),(2.12)及引理 2.1 可知

$$\|y_n\|\leq v\left[hL\sum_{j=1}^{s}|\gamma_j|+\sum_{i=1}^{s}|v_i|\left(hL\sum_{j=1}^{s}|b_{ij}|+\varepsilon\right)\right],\ n\geq n_0 \tag{2.13}$$

当 $\gamma>0$，利用[5]的推导技巧可知，存在 $R>0$, $\tilde{n}_0\geq 0$ 使得 $\left\|y^{(n-1)}\right\|_G^2\leq R,\ n\geq\tilde{n}_0$ (2.14)

其中

$$R=2\left(r\lambda_1+2\tau\left(\beta_1+\beta_2\right)\right)R_2+2\left(2m+r\right)hd\gamma,$$

$$\tilde{n}_0=\frac{\left(r\lambda_1+2\tau\left(\beta_1+\beta_2\right)\right)R_1}{2hd\gamma}+2m+r,$$

$$R_2=\max\left(\alpha_1',\alpha_2'\right),$$

$$\alpha_1'=v^2\left[hL_1\sum_{j=1}^{s}|\gamma_j|+\sum_{i=1}^{s}|v_i|\left(hL_1\sum_{j=1}^{s}|b_{ij}|+\sqrt{\frac{\alpha_2'}{d_i}}\right)\right]^2,$$

$$\alpha_2'=4\left(m+r\right)\frac{hd\gamma}{\mu},$$

$$L_1=\sup_{\substack{|u|\leq b,|v_1|\leq b\\|v_2|\leq b}}\left\|f(u,v_1,v_2)\right\|,\ u,v_1,v_2\in X,$$

$$b=\sqrt{\alpha_2'/\min_{1\leq i\leq s}d_i}\ 。$$

由(2.13)及(2.14)可知多步 Runge-Kutta 法(1.3),(1.4)是 GD(l)-散逸的。

引理 2.4[5] 如果级-不可约的方法(1.3),(1.4)对矩阵 G 和 D 是代数稳定的，则 D>0。

推论 2.5 假设多步 Runge-Kutta 法 (1.3),(1.4)是不可约且代数稳定的，则该方法是有限维 GD-散逸的。

参考文献：

[1]Humphries A R , Stuart A M. Runge-Kutta methods for dissipative and gradient dynamical systems [J].SIAM J. Numer.Anal.1994,31(5):1452-1485.

[2]Huang Chengming. Dissipativity of Runge-Kutta methods for dissipative systems with delays [J]. IMA J. Numer. Anal. 2000, 20(1):153-166.

[3]Huang Chengming. Dissipativity of one-leg methods for dynamical systems with delays [J]. Appl Numer Math, 2000, 35(1):11-22.

[4]黄乘明,陈光南.延迟动力系统线性方法的散逸性[J].计算数学,2000,22(4):501-506.

[5]Huang Chengming, Chang Q S. Dissipativity of multistep Runge-Kutta methods for dynamical systems with delays [J]. Mathematical and computer modelling, 2004, 40(1): 1285-1296.

[6]余越昕,李寿佛.多延迟微分方程线性方法的散逸性[J].湘潭师范学院学报,2001,23(3):1-5.

[7]王素霞,王炳涛,文立平. 多延迟微分方程 Runge-Kutta 方法的散逸性[J].吉首大学学报,2007,28(4):20-23.

[8]Hill A T. Dissipativity of Runge-Kutta methods in Hilbert spaces[J].BIT.1997,37(1):37-42.

[9]李寿佛.刚性微分方程算法理论[M].长沙：湖南科学技术出版社, 1997.

责任编辑：胡德明

Dissipativity of Multistep Runge-Kutta Method for Multi-delay Differential Equations

Yao Jinran[1],Liu Jianguo[2]

(1.Department of Mathematics, Huangshan College, Huangshan 245041, China; 2.School of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Multistep Runge-Kutta method with (k,l)-algebraically stable is applied to multi-delay differential equations. The dissipativity of the method is discussed and the result of finite-dimensional dissipativity of (k,l)- algebraically stable multistep Runge-Kutta method is obtained.

Key words: multi-delay differential equation; multistep Runge-Kutta method; (k,l)-algebraically stable; dissipativity

多延迟微分方程多步Runge-Kutta法的散逸性

作者：　姚金然，　刘建国，　Yao Jinran，　Liu Jianguo
作者单位：　姚金然,Yao Jinran(黄山学院,数学系,安徽,黄山,245041)，　刘建国,Liu Jianguo(中南大学,数学科学与计算技术学院,湖南,长沙,410075)
刊名：　黄山学院学报
英文刊名：　JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)：　2009，11(3)