幻方构建的一种方法

汪 沸[1],姚华胜[2]
(1.黄山学院,安徽 黄山 245021;2.黄山学校,安徽 黄山,245000)

摘 要:利用矩阵这个工具,创建出一种构建任意 n 阶幻方的方法。构建过程中分别对奇数和偶数阶幻方采用不同的方法,对于偶数阶又分为 2 的偶数倍阶和 2 的奇数倍阶加以构建。运用此法不仅可以构建任意阶幻方,还可进一步类比、推广到三维的情形。

关键词:幻方;阶;奇数阶;偶数阶
中图分类号:O241.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2009)03-0028-05

“幻方”就是将 n^2 个数写成 $n\times n$ 的矩阵,使 n 行、n 列及二对角线上诸数之和均相等,此矩阵叫做一个 n 阶幻方。

将 n^2 个数选为 $1-n^2$ 或 $0-n^2-1$ $(n\in N^+,n\geqslant 3)$ 的幻方是基本而重要的特例。本文拟就 $0-n^2-1$ 这种特例探究幻方的构建规律。现将此 n^2 个数写成矩阵。

$$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-2 & n-1 \\ n & n+1 & n+2 & \cdots\cdots & 2n-2 & 2n-1 \\ 2n & 2n+1 & 2n+2 & \cdots\cdots & 3n-2 & 3n-1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots\cdots & n^2-2 & n^2-1 \end{pmatrix}$$

要求构建出来的幻方的行、列及对角线上诸数之和为 $\frac{(0+n^2-1)n^2}{2n}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$。而

$$A_n=n\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \cdots\cdots & 2 & 2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n-1 & n-1 & \cdots\cdots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1)中二矩阵分别记作 P_n 和 P_n^T。

故要将 A_n 演变成幻方,只需将 P_n 和 P_n^T 演变成幻方,再按(1)求 A_n 的幻方。

1 n 为奇数,即 $n=2k+1$

$$A_{2k+1}=(2k+1)P_{2k+1}+P_{2k+1}^T$$

$$=(2k+1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k & k & \cdots & k & \cdots & k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2k & 2k & \cdots & 2k & \cdots & 2k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & 2k \\ 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & 2k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & 2k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & 2k \end{pmatrix}$$

为了将 P_{2k+1}、P_{2k+1}^T 演变成幻方,我们编制数表 1。

以 P_{2k+1} 的列为第 1 列自上到下按序为 0 至 $2k$ (共 $2k+1$ 个数),把 0 移到最后得第 2 列,直到第 $2k+1$ 列 $2k$ 占最上一位,再接下去又重复原来的列无限循环下去。

收稿日期:2009-01-18
作者简介:汪 沸(1993-),安徽歙县人,黄山学院副教授。

表 1　数表

0	1	2	…	$k-1$	k	$k+1$	…	$2k$	0	1	2	…	$k-1$	k
1	2	3	…	k	$k+1$	$k+2$	…	0	1	2	3	…	k	$k+1$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$k-1$	k	$k+1$	…	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	…	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	…	$2k-2$	$2k-1$
k	$k+1$	$k+2$	…	$2k-1$	$2k$	0	…	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	…	$2k-1$	$2k$
$k+1$	$k+2$	$k+3$	…	$2k$	0	1	…	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	…	$2k$	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$2k$	0	1	…	$k-2$	$k-1$	k	…	$2k-1$	$2k$	0	1	…	$k-2$	$k-1$

在表 1 中任取连续 $2k+1$ 列构成矩阵，其各行各列诸数之和均为 $\frac{(0+2k)\times(2k+1)}{2}=k(2k+1)$，但二对角线上诸数之和未必等于此数。不过对于奇数 $n=2k+1$，我们总可以取 $\frac{0+2k}{2}=k$ 居于中心的 $2k+1$ 列构成的矩阵总是一个 $2k+1$ 阶幻方。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{lr} X \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & Y \end{array} \\
P'_{2k+1}= & \begin{pmatrix}
k+1 & k+2 & \cdots & 2k & 0 & 1 & 2 & \cdots & k-1 & k \\
k+2 & k+3 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2k & 0 & \cdots & k-2 & k-1 & k & k+1 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 \\
0 & 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & k+2 & \cdots & 2k-1 & 2k \\
1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & 2k & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
k & k+1 & \cdots & 2k-1 & 2k & 0 & 1 & \cdots & k-2 & k-1
\end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{lr} Z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & T \end{array}
\end{array}
$$

同理有：

$$
P'^{T}_{2k+1}=\begin{pmatrix}
k & k-1 & \cdots & 1 & 0 & 2k & \cdots & k+2 & k+1 \\
k+1 & k & \cdots & 2 & 1 & 0 & \cdots & k+3 & k+2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2k-1 & 2k-2 & \cdots & k & k-1 & k-2 & \cdots & 0 & 2k \\
2k & 2k-1 & \cdots & k+1 & k & k-1 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 2k & \cdots & k+2 & k+1 & k & \cdots & 2 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
k-2 & k-3 & \cdots & 2k & 2k-1 & 2k-2 & \cdots & k & k-1 \\
k-1 & k-2 & \cdots & 0 & 2k & 2k-1 & \cdots & k+1 & k
\end{pmatrix}
$$

它不仅"行和"与"列和"均为 $k(2k+1)$，而且对角线 YZ 上各数和也为 $k+k+\cdots\cdots+k=k(2k+1)$；对角线 XT 上各数和为 $k+[k(k+2)+(k-2)+\cdots[(k-3)+(k+3)]+[(k+1)+(k-1)]=k\ (2k+1)$。所以它是 P_{2k+1} 的一个幻方。同理可写出 P^{T}_{2k+1} 对应的幻方。如上矩阵，分别记作 P'_{2k+1}、P'^{T}_{2k+1}。则 A_{2k+1} 的幻方 $=(2k+1)P'_{2k+1}+P'^{T}_{2k+1}$。

例如，当 $k=1$ 时，$n=3$

$$
A_3=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix} \tag{2}
$$

$$
P'_3=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},\ P'^{T}_3=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}
$$

$$
\therefore 3\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&7\\6&4&2\\1&8&3\end{pmatrix} \tag{2′}
$$

这就是 A_3 演变成的 3 阶幻方。

同理，当 $k=2$ 时，$n=5$

$$
\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\5&6&7&8&9\\10&11&12&13&14\\15&16&17&18&19\\20&21&22&23&24\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\end{pmatrix} \tag{3}
$$

$$
P'_5=\begin{pmatrix}2&1&0&4&3\\3&2&1&0&4\\4&3&2&1&0\\0&4&3&2&1\\1&0&4&3&2\end{pmatrix}\ P'^{T}_5=\begin{pmatrix}3&4&0&1&2\\4&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\\2&3&4&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
\therefore 5\begin{pmatrix}2&1&0&4&3\\3&2&1&0&4\\4&3&2&1&0\\0&4&3&2&1\\1&0&4&3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&0&1&2\\4&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\\2&3&4&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9&0&21&17\\19&10&6&2&23\\20&16&12&8&4\\1&22&18&14&5\\7&3&24&15&11\end{pmatrix} \tag{3′}
$$

这就是 A_5 演变成的 5 阶幻方。

2　n 为偶数，即 $n=2k(k\in N^{+},k\geqslant 2)$

2.1　k 是 2 的偶数倍的情况

$k=2m$ 时，$n=4m$

$A_n=A_{4m}=$

$$
4m\begin{pmatrix}
0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\
1&1&\cdots&1&1&\cdots&1&1&\cdots&1&1&\cdots&1\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\
m-1&m-1&\cdots&m-1&m-1&\cdots&m-1&m-1&\cdots&m-1&m-1&\cdots&m-1\\
m&m&\cdots&m&m&\cdots&m&m&\cdots&m&m&\cdots&m\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\
2m-1&2m-1&\cdots&2m-1&2m-1&\cdots&2m-1&2m-1&\cdots&2m-1&2m-1&\cdots&2m-1\\
2m&2m&\cdots&2m&2m&\cdots&2m&2m&\cdots&2m&2m&\cdots&2m\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\
3m-1&3m-1&\cdots&3m-1&3m-1&\cdots&3m-1&3m-1&\cdots&3m-1&3m-1&\cdots&3m-1\\
3m&3m&\cdots&3m&3m&\cdots&3m&3m&\cdots&3m&3m&\cdots&3m\\
\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\
4m-1&4m-1&\cdots&4m-1&4m-1&\cdots&4m-1&4m-1&\cdots&4m-1&4m-1&\cdots&4m-1
\end{pmatrix}
$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \end{pmatrix}$$

二互为转置的矩阵分别记作 P_{4m}、P^T_{4m}。

将 $P_{4m}(P^T_{4m})$ 中第 $m+1$ 列(行)至第 $3m$ 列(行)中各数绕对角线交点旋转 180^0 得矩阵 $P'_{4m}(P'^T_{4m})$。

$$P'^T_{4m}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 4m-1 & \cdots & 4m-1 & 4m-1 & \cdots & 4m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 4m-2 & \cdots & 4m-2 & 4m-2 & \cdots & 4m-2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m-1 & m-1 & \cdots & m-1 & 3m & \cdots & 3m & 3m & \cdots & 3m & m-1 & \cdots & m-1 \\ m & m & \cdots & m & 3m-1 & \cdots & 3m-1 & 3m-1 & \cdots & 3m-1 & m & \cdots & m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2m-1 & 2m-1 & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 2m & 2m & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & 2m-1 \\ 2m & 2m & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & 2m-1 & 2m-1 & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 2m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3m-1 & 3m-1 & \cdots & 3m-1 & m & \cdots & m & m & \cdots & m & 3m-1 & \cdots & 3m-1 \\ 3m & 3m & \cdots & 3m & m-1 & \cdots & m-1 & m-1 & \cdots & m-1 & 3m & \cdots & 3m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4m-1 & 4m-1 & \cdots & 4m-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 & 4m-1 & & 4m-1 \end{pmatrix}$$

P'_{4m} 中,①行和$=2m(4m-1)=2m+2m(2m-1)=\cdots=2m[(2m-1)+2m]=2m(4m-1)$;

②列和$=\dfrac{0+(4m-1)}{2}\times 4m=2m(4m-1)$;

③对角线和$=(0+1+\cdots m-1)+(3m+\cdots 4m-1)$

$+(m+\cdots 3m-1)=2m(4m-1)$。

对于 P'^T_{4m},只要将上述 P'_{4m} 中"行"、"列"交换即可。

A_{4m} 的幻方为$4mP'_n+P'^T_n$。

$$P'_{4m}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ 4m-1 & 4m-2 & \cdots & 3m & 3m-1 & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & m & m-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4m-1 & 4m-2 & \cdots & 3m & 3m-1 & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & m & m-1 & \cdots & 0 \\ 4m-1 & 4m-2 & \cdots & 3m & 3m-1 & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & m & m-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4m-1 & 4m-2 & \cdots & 3m & 3m-1 & \cdots & 2m & 2m-1 & \cdots & m & m-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 & m & \cdots & 2m-1 & 2m & \cdots & 3m-1 & 3m & \cdots & 4m-1 \end{pmatrix}$$

例如 $m=1,n=4$

$$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P'_4=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ P'^T_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A_4 的幻方$=4P'_4+P'^T_4=\begin{pmatrix} 0 & 13 & 14 & 3 \\ 7 & 10 & 9 & 4 \\ 11 & 6 & 5 & 8 \\ 12 & 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$

$m=2,n=8$

$$A_8=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 \\ 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \\ 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 \end{pmatrix}$$

$$=8\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P'_8=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix},P'^T_8=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_8 \text{ 的幻方}=8P'_8+P'^T_8=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 58 & 59 & 60 & 61 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 50 & 51 & 52 & 53 & 14 & 15 \\ 23 & 22 & 37 & 36 & 35 & 34 & 17 & 16 \\ 31 & 30 & 45 & 44 & 43 & 42 & 25 & 24 \\ 39 & 38 & 29 & 28 & 27 & 26 & 33 & 32 \\ 47 & 46 & 21 & 20 & 19 & 18 & 41 & 40 \\ 48 & 49 & 10 & 11 & 12 & 13 & 54 & 55 \\ 56 & 57 & 2 & 3 & 4 & 5 & 62 & 63 \end{pmatrix}$$

所以,对于任意 $m\in N^+$,A_{4m} 总可以演变成 $4m$ 阶幻方。

2.2 $k=2m+1(m\in N^+)$

当 $k=2m+1$ 时 $n=2(2m+1)$,$n^2=2^2(2m+1)^2$

$\therefore A_{2(2m+1)}$可表成$(2m+1)^2$个 2 阶子阵的矩阵。

$$A_{2(2m+1)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (2m+1)+0 & \cdots & 2(2m+1)-1 \\ 2(2m+1)+0 & 2(2m+1)+1 & \cdots & 3(2m+1)+0 & \cdots & 4(2m+1)-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4m(2m+1)+0 & 4m(2m+1)+1 & \cdots & 4m(2m+1)+(2m+1) & \cdots & 2(2m+1)^2-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 4(2m+1)^2-2(2m+1) & 4(2m+1)^2-2(2m+1)+1 & \cdots & 4(2m+1)^2-(2m+1) & \cdots & 4(2m+1)^2-1 \end{pmatrix}$$

$$A'_{2m+1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,2m+1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{2m+1,1} & A_{2m+1,2} & \cdots & A_{2m+1,2m+1} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},A_{12}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},A_{2m+1,2m+1}=\begin{pmatrix} 4(2m+1)^2-4 & 4(2m+1)^2-3 \\ 4(2m+1)^2-2 & 4(2m+1)^2-1 \end{pmatrix}$$

其中

$$A'_{2m+1}=4\begin{pmatrix} 0 & 0 & & m & m & & 2m & 2m \\ 0 & 0 & \cdots & m & m & \cdots & 2m & 2m \\ 2m+1 & 2m+1 & & 3m+1 & 3m+1 & & 4m+1 & 4m+1 \\ 2m+1 & 2m+1 & \cdots & 3m+1 & 3m+1 & \cdots & 4m+1 & 4m+1 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ m(2m+1) & m(2m+1) & & m(2m+2) & m(2m+2) & & m(2m+3) & m(2m+3) \\ m(2m+1) & m(2m+1) & \cdots & m(2m+2) & m(2m+2) & \cdots & m(2m+3) & m(2m+3) \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 2m(2m+1) & 2m(2m+1) & & (2m+1)^2-(m+1) & (2m+1)^2-(m+1) & & (2m+1)^2-1 & (2m+1)^2-1 \\ 2m(2m+1) & 2m(2m+1) & \cdots & (2m+1)^2-(m+1) & (2m+1)^2-(m+1) & \cdots & (2m+1)^2-1 & (2m+1)^2-1 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 2 & 3 \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1 & & 0 & 1 & & & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

此二矩阵分别记作 P_{2m+1} 和 $Q2m+1$。

因 $2m+1$ 是奇数，故可以按第一种情形(即 n 为奇数)将 P_{2m+1} 演变成关于的 $2m+1$ 阶幻方，又因 P_{2m+1} 中每个子阵 4 数相等，所以它又是一个 $2(2m+1)$阶幻方。我们现在只需把注意力集中在 Q_{2m+1}。作为 $2(2m+1)$阶幻方演变，可通过下列步骤完成：(Q_{2m+1} 中各子阵都相等，它本身当然是关于子阵的幻方)。

1.调行

使行各数和为 $3(2m+1)$，Q_{2m+1} 任一行中上一行和为$(0+1)(2m+1)=2m+1$，下一行和为$(2+3)(2m+1)=5(2m+1)$，故要从“下行”调整 $2(2m+1)$到“上行”，平均每一子阵上调 2。可将每个子阵中“3”与“1”对调，(或“2”与“0”对调)，得到 Q'_{2m+1}：

$$Q'_{2m+1}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.调列(保持行和不变)。

Q'_{2m+1} 中各子阵均相等，当然各列和亦等，但“左列”和为 $2(2m+1)$，“右列”和为 $4(2m+1)$，故需从“右列”调整 $2m+1$ 到“左列”。由于 $2m+1=2(m-1)+3$，且每子阵上行右、左数差为 3，下行右、左数差为-1，列差为 2，所以只要将 $1—2(m-1)+1$，即 $1—2m-1$ 行各子阵中左右之数对调得 Q''_{2m+1}，作为 $2(2m+1)$阶矩阵的列和为 $3(2m+1)$。

$$Q''_{2m+1}=\begin{array}{c} X \hspace{14em} Y \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & & 3 & 0 & & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 3 & 0 & 3 & 0 & & 3 & 0 & & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 3 & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ Z \hspace{14em} T \end{array}$$

3.调对角线(保持行和与列和不变)

因 Q''_{2m+1} 对角线 XT 上数和为 $5(m-1)+(m+1)+4=6m$，对角线 YZ 上数和为$(m-1)+5(m+1)+2=6m+6$。要从 YZ 上调整 3 到 XT 上，可将第 $m+1$ 列中 $A'_{1,m+1}$ 与 $A'_{m+1,m+1}$ 子阵中 3 与 0 对调，得

$$Q'''_{2m+1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & & 0 & 3 & & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 3 & 0 & 3 & 0 & & 3 & 0 & & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & & 3 & 0 & & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 3 & 0 & 3 & & 0 & 3 & & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

这就是由 Q_{2m+1} 演变得到的 $2(2m+1)$阶幻方。故当 $n=2(2m+1)$时，也可构建出阶幻方。

例如当 $m=1,k=3,n=6$ 时

$$A_6=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{pmatrix} \rightarrow A'_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 16 & 17 & 20 & 21 \\ 14 & 15 & 18 & 19 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 28 & 29 & 32 & 33 \\ 26 & 27 & 30 & 31 & 34 & 35 \end{pmatrix}$$

$$=4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix}0&0&1&1&2&2\\0&0&1&1&2&2\\3&3&4&4&5&5\\3&3&4&4&5&5\\6&6&7&7&8&8\\6&6&7&7&8&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&8&8&3&3\\1&1&8&8&3&3\\6&6&4&4&2&2\\6&6&4&4&2&2\\5&5&0&0&7&7\\5&5&0&0&7&7\end{pmatrix}$$

$$Q_3=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1\\2&3&2&3&2&3\\0&1&0&1&0&1\\2&3&2&3&2&3\\0&1&0&1&0&1\\2&3&2&3&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{调行}}\begin{pmatrix}0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\\0&3&3&0&0&3\\2&1&2&1&2&1\\0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{调列}}\begin{pmatrix}3&0&3&0&3&0\\2&1&2&1&2&1\\0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\\0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{调对角线}}\begin{pmatrix}3&0&0&3&3&0\\2&1&2&1&2&1\\0&3&3&0&0&3\\2&1&2&1&2&1\\0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore 4\begin{pmatrix}1&1&8&8&3&3\\1&1&8&8&3&3\\6&6&4&4&2&2\\6&6&4&4&2&2\\5&5&0&0&7&7\\5&5&0&0&7&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0&3&3&0\\2&1&2&1&2&1\\0&3&3&0&0&3\\2&1&2&1&2&1\\0&3&0&3&0&3\\2&1&2&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&4&32&35&15&12\\6&5&34&33&14&13\\24&27&19&16&8&11\\26&25&18&17&10&9\\20&23&0&3&28&31\\22&21&2&1&30&29\end{pmatrix}$$

这就是所求的 6 阶幻方。

综上所述，对于自然数 $n(n\in N^+, N\geqslant 3)$，对于 $0\sim n^2-1$ 这 n^2 个数总能构建出 n 阶幻方。

责任编辑：胡德明

A New Method of Structuring Magic Square

Wang Fei[1], Yao Huasheng[2]

(1. Huangshan University, Huangshan 245041, China;

2. Huangshan School, Huangshan 245000, China)

Abstract: The paper introduces a new method of structuring random n brands magic square based on matrix. Different methods are used to deal with odd number brands magic square and even number brands magic square. In addition, the latter one is further divided into 2 dual times bands and 2 odd times bands. The new method not only works in structuring random brands magic square but also in three-dimensional situation.

Key words: magic square; brand; structure; odd number brand; even number brand

幻方构建的一种方法

作者：汪沸， 姚华胜， Wang Fei， Yao Huasheng
作者单位：汪沸,Wang Fei(黄山学院,安徽,黄山245021)， 姚华胜,Yao Huasheng(黄山学校,安徽黄山,245000)

刊名：黄山学院学报
英文刊名：JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)：2009，11(3)