对 $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ 的积分方法探讨

陈 浩

(宿州学院 应用数学系,安徽 宿州 234000)

摘 要:通过对 $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ 的积分方法的分析探讨,说明如何灵活使用积分法解决积分问题,方法灵活、巧妙,适用范围广。

关键词:积分;积分方法;形式逻辑;辨证逻辑

中图分类号:O172　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-447X(2010)04-0007-03

1 引 言

数学分析主要研究的对象是变量与函数,它的主题是微积分,它所持的基本观点是运动的观点,变化的观点,所用的基本方法是极限的方法,用极限的思想贯穿于数学分析的始终,解决了函数的连续性、可微性、可积性等基本概念和基本方法。它的内容既有形式逻辑,又有大量的辨证逻辑。一题多解能够巩固已学知识,开拓解题思路,探索解题技巧,训练解题的灵活性,增强解题能力,在比较各种解法的难与易,繁与简的基础上,能够总结出一些规律性的东西,进一步提高学习效果。

本文通过对 $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ 的积分方法的分析探讨,阐述在使用换元积分法和分部积分法过程中,如何领会积分法的内涵,采取灵活多变的解题方法解决实际的问题。

2 方法探讨

例:求 $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$　　$(a>0)$

解法 1:令 $x=a\sin t$,则 $dx=a\cos tdt$,所以

$$I=\int\frac{a\cos tdt}{a^2\sin t\cos t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\csc t(\csc t+\cot t)}{\csc t+\cot t}dt$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\cot t+\csc t\right|+c=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right|+c$$

解法 2:令 $x=a\sin t$,则 $dx=a\cos tdt$,所以

$$I=\int\frac{-a\cos tdt}{a^2\cos t\sin t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\cos t}=-\frac{1}{a}\int\frac{\sec t(\mathrm{cec}t+\mathrm{con}t)}{\csc t+\tan t}dt$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\sec t+\tan t\right|+c=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right|+c$$

注:方法 1 和方法 2 是用传统的三角代换法将根号去掉,化为三角函数有理式的积分。[1,2]

解法 3:令 $\sqrt{a^2-x^2}=t$, $a^2-x^2=t^2$, $x=\sqrt{a^2-y^2}$,

$$dt=\frac{-tdt}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

所以 $$I=\int\frac{1}{t\sqrt{a^2-t^2}}\cdot\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}=dt$$

$$=\int-\frac{dt}{a^2-t^2}=\frac{1}{a^2}\int(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a})dt$$

收稿日期:2010-04-29
基金项目:安徽省教育厅精品课程项目(安徽省教育厅教秘高[2006]53 号);宿州学院教授科研基金项目(2006jb08)
作者简介:陈 浩(1948-),安徽宿州人,宿州学院应用数学系教授,研究方向为泛函分析。

$$=\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+c=\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

注：解法3利用 $x^2+t^2=a^2$ 中 x 与 t 的对称性，巧妙地将被积函数化为有理函数。

解法4：因为 $I=\int\frac{\frac{1}{x^2}dx}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{a}{x})}{\sqrt{(\frac{a}{x})^2-1}}$

所以可令 $x=\frac{a}{t}$，则 $dx=-\frac{a}{t^2}dt$

所以 $I=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\frac{1}{a}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+c$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

解法5：由解法4知

$$I=\int\frac{\frac{1}{x^2}dx}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{a}{x})}{\sqrt{(\frac{a}{x})^2-1}}$$

所以可令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$

$$I=-\frac{1}{a}\int\frac{dat}{\sqrt{(at)^2-1}}=-\frac{1}{a}\ln\left|at+\sqrt{(at)^2-1}\right|+c$$

解法6：令 $x^2=\frac{1}{t},x=\frac{1}{\sqrt{t}},dx=-\frac{1}{2}\frac{dt}{t\sqrt{t}}$

所以 $I=\int\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{a^2-\frac{1}{t}}}(-\frac{1}{2})\frac{dt}{t\sqrt{t}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{a^2t-1}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d(a\sqrt{t})}{\sqrt{(a\sqrt{t})^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|a\sqrt{t}+\sqrt{a^2t-1}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+c$$

注：解法4-6是凑微分和第二换元法混合应用。

解法7：$\because I=\int\frac{dx}{x(a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}$

$\therefore$ 可令 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t$，则 $a+x=(a-x)t^2$

$$x=\frac{a(t^2-1)}{1+t^2}\quad dx=\frac{4atdt}{(1+t^2)^2}$$

$$a^2-x^2=(a-x)^2t^2=(a-\frac{at^2-a}{1+t^2})^2t^2=\frac{4a^2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{\frac{a(t^2-1)}{1+t^2}\cdot\frac{2at}{1+t^2}}\cdot\frac{4atdt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{2dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{a}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}\right|+c=\frac{1}{a}\mathrm{lm}\left|\frac{2x}{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

解法8：令 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t$，则 $a-x=(a+x)t^2$,

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\quad dx=-\frac{-4atat}{(1+t^2)^2},$$

$$a^2-x^2=(a-x)^2t^2=(a+x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2})^2t^2=\frac{4a^2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$I=\int\frac{1}{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\cdot\frac{2at}{1+t^2}}\cdot\frac{-atdt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{2dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{a}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt=\frac{1}{a}\mathrm{lm}\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{2x}{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

注：解法7、解法8中令 $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=t$ 或 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t$ 是第二换元积分法中的一种特殊的典型情况，是比较常见的一类积分。

解法9：令 $\sqrt{x^2-a^2}=tx-a$ （欧拉代换）

$$a^2-x^2=t^2x^2-2atx+a^2,-x^2=t^2x^2-2atx,$$

$$x=\frac{2at}{1+t^2}\qquad\therefore\ dx=-\frac{2a(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{\frac{2at}{1+t^2}\cdot\left(\frac{2at^2}{1+t^2}-0\right)}\cdot\frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\int\frac{(1-t^2)}{t(at^2-a)}dt$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+c=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

解法 10:令 $\sqrt{a^2-x^2}=(a+x)t, a^2-x^2=(a+x)^2t^2$,约去 $a+x$ 得:

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\quad dx=-\frac{4atat}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore I=\int\frac{1}{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\cdot\left(a+\frac{a-at^2}{1+t^2}\right)t}\cdot\frac{-4atat}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{-2}{1-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{2dt}{t^2-1}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

解法 11:令 $\sqrt{a^2-x^2}=xt,\ a^2-x^2=x^2t^2$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{-atdt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

注:解法 9-11 是利用欧拉代换法。

解法 12:令 $\frac{a}{x}=cht$,则 $x=\frac{a}{cht},dx=\frac{-asht}{ch^2t}dt$

$$\therefore\ I=\int\frac{1}{\frac{a}{cht}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2}{ch^2t}}}\cdot\frac{-asht}{ch^2t}dt$$

$$=\int\frac{-sht}{a\sqrt{ch^2t-1}}dt=-\frac{1}{a}\int dt=-\frac{1}{a}t+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

$$\left(\frac{a}{x}=cht\ \therefore\frac{a}{x}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\Rightarrow e^t=\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

注:解法 12 利用了双曲余弦代换,简化了积分运算。

参考文献:

[1]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,1991:244-310.

[2]同济大学数学系.高等数学[M].北京:高等教育出版社 2004:198-210.

责任编辑:胡德明

Integral Method for $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

Chen Hao

(Department of mathematics, Suzhou College, Suzhou 234000, China)

Abstract: In this paper, integral method for $\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ is explored to show how to use the method to solve integration problems. It's proved to be a flexible and ingenious method with wide applicability.

Key words: integral; integral method; formal logic; dialectical logic

对∫dx/x√a2-x2的积分方法探讨

作者： 陈浩， Chen Hao
作者单位： 宿州学院,应用数学系,安徽,宿州,234000
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2010，12(5)
被引用次数： 0次

参考文献(2条)

1. 华东师范大学数学系 数学分析 1991

2. 同济大学数学系 高等数学 2004

相似文献(10条)

1. 会议论文 张志富. 邱崇践. 王澄海 利用分段积分方法模拟我国西北荒漠化的短期气候效应 2007

本文利用MM5模式。分别采用连续积分方法和分段积分方法，研究了西北荒漠扩展后对我国区域气候的可能影响。模拟结果表明，采用连续积分方法和分段积分方法，得出荒漠扩展后引起的我国区域气候变化有明显的不同。在现状模拟时，分段积分方法在各个气候要素场的模拟上，都明显优于连续积分方法的结果，特别是降水场的模拟上，所以，我们有理由相信，分段积分方法得到的荒漠化扩展引起的气候效应更可信。利用分段积分方法研究发现，我国西北荒漠扩展后，我国东部大部分地区降水减少，东北部分地区和我国中部降水增加，在中高层上，我国中部从海洋吹向内陆的风得到了加强，这更有利于我国内陆地区降水，除与降水增大的区域对应有一条降温区外，我国其它大部分地区温度升高。

2. 学位论文 李红光 KH积分方法合成地震图 2007

本论文系统简洁地介绍Kirchhoff-Helmholtz积分方法(简称KH积分方法)的基本原理、推导了基本计算公式并将其应用到计算反射波、转换波和回折波的地震学问题中。KH积分方法是一种边界积分方法，它从严格的波动方程出发，将体积分转化为边界积分，当用于计算反射或透射波时，KH积分方法把界面上的每个点都看作一个点源，认为每个点源对反射或透射振幅都有一定的贡献，把界面上每个点的贡献相加就得到了反射或透射响应。

本文首先用KH积分方法计算单层水平界面的反射波响应，并与反射率法和有限差分方法的计算结果进行了对比，验证了方法及程序的正确性。在此基础上，进一步模拟了弯曲界面的反射波响应，与有限差分模拟的结果对比表明：KH积分方法在计算不规则界面时有很好的精确度，而且其计算速度明显优于有限差分方法。考虑自由界面的反射，我们应用KH积分方法计算了包含深度震相在内的所有反射波：PP、PS、pPP、pPS、pSP、pSS，通过与反射率法的结果对比发现，六种震相都吻合的很好。

进一步地把KH积分方法推广到计算近震/远震转换波响应，推导出转换波的KH积分公式，分别计算了水平界面与弯曲界面上的近震/远震转换波响应，通过与反射率法、动力学射线追踪及有限差分方法的对比，表明KH方法能够很好地模拟不规则界面上的近震/远震转换波。

最后用KH方法分别计算了含有多层界面介质中的反射波响应和速度梯度变化介质中的回折波响应，与反射率方法结果非常相近。

研究表明，KH积分方法是一种较好地模拟横向非均匀介质的合成地震图方法，其计算精度不亚于其他方法，且计算效率高。

3. 期刊论文 董博. 陈飞武. 韦美菊 溶剂效应计算中两种积分方法的比较研究 -物理化学学报2010,26(4)

采用多面体表面模拟溶质空腔,讨论了溶剂效应计算中近似积分方法和解析积分方法的平行性和收敛性.我们发现:对所研究的40个中性分子,近似方法和解析方法之间的平行性较好;但是,对于20个正离子和27个负离子,当溶质空腔分别为0.002和0.001 a.u.的等电荷密度面时,近似方法和解析方法之间的平行性较差,因此,近似方法的可靠性不一定有保证.我们还发现当多面体的表面无限趋近空腔的表面时,不管采用何种多面体序列,近似方法和解析方法的基态总能量都基本趋向同一极限值.

4. 期刊论文 郭泽英. 李青宁. GUO Zeying. LI Qingning 动力反应分析的显式积分方法及其稳定性 -地震工程与工程振动2008,28(2)

Newmark-更新精细积分法是动力方程求解的隐式的时域逐步积分法,其稳定性条件非常容易满足.与隐式方法相比较,显式积分方法不需要求解耦联的方程组,可以有效地减少内存占用和机时耗费.因此,根据显式积分方法的特点和优点,基于Newmark-更新精细积分法的基本思想,提出其显式积分格式.对显式积分方法的精度与稳定性进行了初步的分析,指出该显式积分方法具有极好的稳定性,其精度比隐式积分方法的精度稍低.随着时间步长的增加,其精度优于传统的方法.

5. 学位论文 张素英 非线性动力学系统一般形式及其广义哈密顿体系下的几何积分方法 2003

几何积分方法无论在提高计算精度还是在保持系统的不变量性质等方面都比传统的积分算法有优势，同时，它还具有向后误差分析的性质，可用于研究数值方法的长期行为，以及进行数值方法的稳定性分析。本文主要研究了广义Hamilton系统及一般非线性动力学系统的几何积分方法。

首先，提出了求解一般动力学方程的李级数方法，并给出具体实施办法，它是泰勒展开方法的一个推广。另一方面将动力学微分方程用微分算子的形式表示之后，它的解算子可由它的无穷小生成元的预解式取Laplace逆变换得到，如此再次得到了李级数方法，对于自治系统它是一个李群方法。另外，提出了基于Laplace变换数值反演的非线性动力学方程的求解方法。

其次，基于李级数方法，提出了广义Hamilton系统及耗散广义Hamilton系统的李群积分法。广义Hamilton系统形式是动力学系统的一种恰当表述，它揭示了力学系统内蕴的某种对称性质，它的理论研究和实际应用在力学研究中具有十分重要的意义。本文在守恒系统解析解的理论基础上给出了构造广义Hamilton系统任意高阶显式保辛积分格式的方法，同时讨论了算法的具体实施过程。对耗散广义Hamilton系统，就自治与非自治系统分别进行了讨论：对于自治系统，采用李级数方法并结合分裂合成的技巧直接进行求解；对于非自治系统，基于Magnus级数方法和Fer展开方法来构造其数值解。文中方法保持了原系统真解的典则性，因而也是稳定的。如果更关注系统的能量性质，如Hamilton函数性质，文中用离散梯度的方法给出了广义Hamilton系统及广义Hamilton控制系统的保持其Hamilton函数性质特征不变的数值解法。

同时，本文在伪Poisson流形上研究了广义Hamilton约束系统的求解问题。把广义Hamilton约束系统变形为无约束的广义Hamilton系统微分方程，提出了保持系统内在结构和约束不变性的李群积分方法，并就约束不变量的误差和稳定性等问题进行了理论分析和数值分析。另外通过引入拉格朗日乘子采用投影技术对广义Hamilton约束系统直接进行积分，进一步简化了积分过程。因为本文的讨论对完整与非完整约束不加区分，一样处理，所以也适用于非完整约束的情形。

然而，一般非线性动力学系统并不是都可以表示为(耗散)广义Hamilton系统的形式，即存在所谓广义Hamilton实现问题。为此，基于经典的Magnus和Fer展开式，在耗散广义Hamilton系统的保结构算法的基础上，主要从两个不同的角度，进一步深入地研究了一般非线性动力学系统的李群积分方法：一个是在算子理论范围，把非线性动力方程表示为一种线性映射作用的模型，便于在线性方程理论上设计新算法；一个是把动力学系统的构形空间拓广到Minkowski空间，在Minkowski空间原非线性动力学方程变形为增广的动力学系统的一个李型方程，便于算法设计和程序实现。其中，基于Magnus展开式的积分方法包含了大量的交换子运算，利用函数的李级数展开技巧和Magnus级数的对称性质，算法设计中涉及了最少数目的交换子的计算，分别给出了包含1个、4个和10个交换子的4阶、6阶和8阶近似格式，并证明了算法是关于时间对称的。需要指出的是对于自治系统该方法更加精确、有

效，二阶方法能达到四阶以上的计算精度。数值算例还显示，基于Magnus展开式的方法可以采用大步长进行计算。同时，基于Fer展开式给出了求解非线性动力学系统的超收敛的积分格式。进而把Magnus和Fer展开方法有机地联系起来，给出了简便易行的构造Fer型积分的方法，并进一步构造了关于时间对称的Fer型积分格式。

Runge-Kutta/Munthe-Kaas(RKMK)方法是求解构形空间在李群上的微分方程的一种推广的Runge-Kutta方法，它把李群上展开的微分方程变换为与之相应的李代数上展开的等价微分方程，用Runge-Kutta方法近似求解变换后的微分方程，再由指数映射拉回到原李群便得到原微分方程的数值解。指数矩阵是矩阵李代数到与之相应的矩阵李群的一个映射，基于RKMK方法，本文将计算指数矩阵的精细积分方法与经典的Runge-Kutta方法相结合在Minkowski空间对非线性动力学系统及其增广动力学系统构造了一族简便有效的RKMK型积分方法，它们均属于李群方法。

基于Magnus及Fer展开式的数值方法中也包含了很多指数矩阵，指数矩阵的计算精度直接影响算法的精度。精细积分能快速有效地计算指数矩阵，本文把求解线性动力学方程的精细积分法推广应用到求解一般非线性动力方程。在Minkowski空间原非线性动力学系统变形为增广的动力学系统，应用精细积分法十分方便，对于自治系统它是一个李群方法。另外，本文通过增维的办法和结合Runge-Kutta方法的办法，巧妙地将精细积分方法用于求解非线性动力学系统，避免了以往精细积分法中矩阵求逆的数值不稳定性，或者逆矩阵不存在等问题。

6.期刊论文 李亚莎.王泽忠.卢斌先.LI Yasha.WANG Zezhong.LU Binxian 三维静电场线性插值边界元中的解析积分方法 -计算物理2007,24(1)

提出求解三维静电场的三角形线性插值边界元解析积分方法.针对含1/R和1/R2的积分项,将单元形状函数分解为常数项、含x的线性项和含y的线性项,从而将边界单元积分简化为6个基本积分组合,并导出其解析计算公式,避免了因形状函数改变而导致的重复计算.该方法不仅可以准确计算远离奇异情况下的边界元积分,而且可以准确计算一阶和二阶接近奇异积分以及一阶奇异积分.计算结果表明,在接近奇异积分和奇异积分比较突出的问题中,当数值积分方法不能给出正确结果时,用同样的边界元网格,解析积分方法可以给出正确的结果,提高了三维静电场线性插值边界元法的计算精度.

7.期刊论文 张艳红.陈善阳.胡晓.ZHANG Yan-hong.CHEN Shan-yang.HU Xiao 一种工程实用的数值积分方法 -工程力学2005,22(3)

在实际工程结构动力反应分析中,往往由于结构型式十分复杂,常用的两种直接积分方法,即显式积分方法和隐式积分方法,在使用中都存在着一定的局限性,如何将这两种积分方法合理有效地结合起来,是一个十分有意义的研究课题.针对实际工程问题中整体结构计算时间步长的选择往往受局部区域的材料特性、尺寸大小等因素影响的这一现象,提出了一种对结构局部区域进行隐式积分、对其余区域进行显式积分的工程实用的显隐式数值积分方法,这种积分格式相对于显式积分格式而言,能显著提高整体结构的计算速度.最后采用三个数值计算实例对这一方法进行验证.

8.学位论文 俞武扬 求总极值的积分方法的一些研究 2004

本文对郑权、张连生等教授有关积分型的求总极值方法的研究工作作了更细微的研究.郑权等于1978年提出的积分水平集求全局优化方法,其主要特点是具有判别全局解的收敛准则,且仅需假定目标及约束函数为连续的,是现有少量较具特色的求全局优化的方法之一.但其实现算法与其提出的概念性算法不一致,且实现算法在理论上易丢弃全局解.1995年张连生教授等提出了离散均值-水平集算法,并证明了其算法的收敛性.在此基础上,邬冬华等给出基于郑权的概念性算法,构造与概念性算法较为吻合的实现算法,并轴以数论方法进行数值计算,得到了实现算法的收敛性.在郑权、张连生关于不连续罚函数的工作基础上,我们构造了一个简单的函数用于实现从有约束到无约束的转化,并给出了相应的收敛性证明.我们还构造了水平值函数,使得相关的积分型最优化方法等价于求一个非线性方程的根,并结合数论中的一致分布给出相应的概念算法和实现算法,证明了实现算法的收敛性.由于构造实现算法过程中利用数论中一致分布代替Monte-Carlo随机投点,使实现算法变为一确定性方法且提高实现算法的收敛速度.我们还对非线性互补问题通过引进非线性互补函数将其转化成无约束最优化问题结合积分方法给出了算法.本文共有五章组成.在第一章中,对于全局优化问题研究的意义、以及目前流行的方法作了简单的介绍.第二章引入了我们证明中需要的数论中的主要结果.第三章中,对于集约束优化问题构造转化函数,给出相应的概念算法及其全局收敛性证明.在第四章,引进了水平值函数,讨论其性质并结合二分法和弦截法给出了两种算法,用数论中一致分布佳点结合水平值函数给出了实现算法,并证明了其全局收敛性.对非线性互补问题转化为无约束最优化问题结合积分方法进行了研究.第五章给出了数值例子说明了我们算法的有效性.

9.期刊论文 张素英.邓子辰 基于Magnus和Fer展开式构造一般非线性动力学方程的几何积分方法 -自然科学进展2004,14(10)

基于求解线性微分方程的Magnus及Fer展开式等李群积分方法的思想和算子半群的理论,研究了一般非线性动力学方程的李群积分法.给出了分别包含1,4和10个交换子的4,6和8阶Magnus型近似格式,并证明了算法是关于时间对称的.同时,给出了基于Fer展开式的积分方法,并把Magnus和Fer展开有机地联系起来,简化了Fer型积分方法的构造,并进一步给出了关于时间对称的Fer型积分格式.它们都属于几何积分法,能保持原动力学系统的许多定性性质.

10.学位论文 李庆宏 微分方程保结构方法的若干问题 2006

从古典意义上讲，常微或偏微分方程数值解主要关注于数值方法的构造，数值方法的精度，收敛性，数值稳定性分析等等，所提的方法被看作是通用的，即它适用任一微分方程．然而，这些通用的方法在实现时所遇到的困难告诉我们这种一个方法可解所有问题的想法是不正确的．事实上，许多微分方程有它自己特有的定性性质或称其为几何结构．渐渐地，人们意识到一个数值方法能否抓住方程的这些定性性质是非常重要的．这种捕获能力已成为衡量数值模拟是否成功的一个准则．近些年来，这种想法引发了所谓的几何数值积分方法或称保结构算法的研究，其主要思想是数值求解微分方程时。数值方法要尽可能多地保持原系统解的定性性质．

在这篇学位论文中，我们考虑了常微与偏微分方程保结构方法中三个的问题。它们分别是，

●解周期初值问题的两步显式P-稳定方法;

●解哈密顿型偏微分方程的多辛积分方法;

●解牛顿运动方程的能量与动量守恒型积分方法.

首先，我们考虑了具有周期或振荡解的二阶常微分方程初值问题(简称周期初值问题)．此类问题时常出现在许多科学与工程的研究领域内．在设计解此类问题的数值方法时，我们不得不考虑方法的这样三个特征：代数阶，周期稳定性以及相延迟性质。特别是相延迟性质．在本文的第二章中，对一维周期问题，我们提出了一类具有高相延迟阶的两步显式P-稳定非线性方法．这些方法仅仅适用于分量情形．为此，我们定义了一种新的向量运算，借助于这种运算，此类方法可直接推广到向量的情形．我们详细讨论此类方法及其向量形式的周期稳定性质及相延迟性质．为了说明这些方法的有效性以及存在的不足。我们给出几个数值例子.

其次，我们研究了解哈密顿型偏微分方程的多辛积分方法．熟知，辛结构是哈密顿常微分方程的最本质的定性性质，自然地，在数值求解哈密顿常微分方程时，我们期望系统的辛结构能够保持．这种想法导致了辛积分方法的出现．近些年来人们对辛积分方法进行深入地研究．实践证明，在解哈密顿常微分方程时。辛方法要比非辛方法要好得多。特别是长时间的计算．哈密顿型偏微分方程是哈密顿常微分方程在时间与空间上的推广，即哈密顿偏微分方程在时间与空间方向上都定义了辛结构，称为多辛结构．如何稳健地求解哈密顿偏微分方程已经成为偏微分方程数值解中具有挑战性的课题之一．同解哈密顿常微分方程一样，我们希望在数值求解哈密顿偏微分方程时，方程的多辛结构能被保持．一个数值格式如果能保持一个离散的多辛守恒律，那么就称其为多辛积分方法．在本文的第三章中，我们证明了对于哈密顿波动方程，如果用两个辛分块Runge-Kutta方法分别对其时间与空间方向进行离散，我们可得到一个多辛积分方法．同样地，如果用两个辛Runge-Kutta-NystrSm方法分别对其时间与空间方向进行离散，我们也可得到一个多辛积分方法．我们讨论了这两个多辛积分方法的能量与动量守恒性质．此外．对于非线性立方Schr5dinger方程，我们考虑了Eulet箱格式及其组合格式．我们证明了这些格式能保持相应的离散多辛守恒律，因而是多辛的．本章最后，我们给出了一些数值结果.

最后，我们研究了解Newton运动方程的能量与角动量守恒积分方法．这里我们考虑的方程描述了一个单质点在中心场的运动规律．这部分内容安排在本文的第四章．注意到，对这些方程，一般情况下，常用的数值方法不能精确保持两个重要的物理量：总能量与角动量，而只是精确到方法的代数阶．为了能获得一个能量与角动量精确守恒的积分方法，我们可以在常用的方法上添加一些适当的校准项．我们证明了一般情况下。任一个常用的方法都可通过这种思想变成一个守恒型积分方法。并且它们有相同的代数阶．然而，此类守恒型积分方法在实现时存在几个问题，需要仔细处理。它们分别是:不动点问题，积分步长及守恒型迭代格式的选取问题等．我们通过几个理论与数值例子说明了这些问题.