第12卷第5期 黄山学院学报 Vo1.12,NO.5
2010年10月 Journal of Huangshan University Oct.2010

超立方体网络的距离参数

谢 歆

(黄山学院 数学系,安徽 黄山 245041)

摘 要:平均距离、距离独立数和距离控制数都是度量网络性能的重要参数。在某种程度上,平均距离比直径更能衡量网络的性能。确定一般图的距离独立数和距离控制数是NPC问题,对于给定的正整数d和l,确定特殊图类的距离独立数和距离控制数显得很重要。得到超立方体网络的平均距离,以及对于某些正整数d和l,超立方体网络的距离独立数和距离控制数。

关键词:平均距离;距离独立数;距离控制数;超立方体网络

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-447X(2010)04-0001-03

1 引 言

设图G是顶点集为$V(G)$和边集为$E(G)$的有限简单图。G中顶点x和y的距离是G中顶点x和y的最短路的长度。G中任意两个顶点距离的最大长度定义为图G的直径,用$d(G)$表示。对于本文没有给的定义和符号,可参见文献[1]。

在一个网络模型里,从一个顶点到另一个顶点传递信息的时间和信号的衰减与信息经过的路线长度是成比例的。直径反映了最坏可能的情形,而平均距离则反映了它的平均情况。在某种程度上,平均距离比直径更能衡量网络的性能。

定义1:图G的所有顶点距离的和定义为

$\sigma(G)=\sum_{v,v\in V(G)} d(u,v)$。图$G$的平均距离定义为

$\mu(G)=\frac{\sigma(G)}{|V(G)|\cdot|V(G)-1|}$,这里$|V(G)|$为$G$的顶点数目。

然而随着对网络拓扑结构的深入研究和分析,仅孤立的考虑直径是不够的,因此许多新的图论概念被提出。距离控制数是台北大学张镇华教授在他的博士学位论文中提出来的,是经典控制数的推广。但在1975年,Meir和Moon就对树的距离控制数和距离独立数进行了研究。

定义2: 设D是G图的一个顶点子集,l是正整数。D距离l-控制顶点x是指点x到D中某顶点的距离不超过l。如果$V(G)-D$中所有顶点都被D距离l-控制,则称D是G的距离l-控制集。距离l-控制数$\gamma_l(G)$是G中所有距离l-控制集的最小顶点个数。

定义3:设I是图G的一个顶点子集,d是正整数。如果I中任意两顶点的距离大于d,则称I是G的距离d-独立集。距离l-独立数$\alpha_d(G)$是G中所有距离l-独立集的最大顶点个数。

超立方体网络的拓扑结构是指n维立方体,通常记为Q_n。它的图论模型是一个简单无向图$Q_n=(V,E)$,Haray已列出它的许多等价定义,最常见的是如下的定义4。

定义4:顶点集$V(Q_n)=\{x_1x_2\cdots x_n:x_i=\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}$,两顶点$x=x_1x_2\cdots x_n$和$y=y_1y_2\cdots y_n$在$Q_n$中相邻当且仅当$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$,即有且仅有一个坐标不同。

超立方体网络Q_n有2^n个顶点,是n正则的,它的直径$d(Q_n)$和连通度都为n,且它是点可迁的图。

收稿日期:2010-05-10
作者简介:谢 歆(1973-),安徽祁门人,黄山学院数学系副教授,研究方向为图论和组合数学。

超立方体网络是目前最通用的，而且性能最优越的互连网络。因此，研究超立方体网络的性质吸引了广大研究工作者的研究兴趣，而且得到了许多好的性质。正由于超立方体的许多性质，超立方体网络在图论领域研究得比较广泛，有关超立方体网络的国际会议和专著也很多。

对于给定的正整数 d 和 l，如果 d 和 l 不小于 $d(G)$，显然有 $\gamma_l(G)=\alpha_d(G)=1$。由于 $l=d=1$ 时，$\gamma_l(G)$ 和 $\alpha_d(G)$ 分别是经典的控制数和独立数，因此对于一般图 G 和正整数 d、l，确定 $\gamma_l(G)$ 和 $\alpha_d(G)$ 的值是 NPC 问题，所以对于特殊图类和正整数 d、l，确定 $\gamma_l(G)$ 和 $\alpha_d(G)$ 的值显得尤为重要。

文[2]介绍了超立方体网络 Qn 的平均距离为 $\mu(Q_n)=\frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$，本文给出了超立方体网络平均距离的另一种证明方法。文 [3] 讨论了广义 *de Bruijn* 和 *Kautz* 有向图的距离控制数。关于图的平均距离、距离控制数和距离独立数的一些结果可参见文献[4,5]。对于某些正整数 d 和 l，本文得到超立方体网络的距离独立数和距离控制数。

2 主要定理和证明

定理 1：超立方体网络 Q_n 的平均距离为 $\mu(Q_n)=\frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$。

证明：由超立方体网络的点可迁性，只需求出顶点 $o=00\cdots0$ 到 $V(Q_n)-\{o\}$ 中顶点的距离和 $\sigma_o(G)$。设 $x=x_1x_2\cdots x_n\in v(G)-\{o\}$，若 x 中有 k 个坐标为 1，则 x 中有 $n-k$ 个坐标为 0，此时 o 到 x 的距离为 k。而这样顶点 x 在 $V(Q_n)-\{o\}$ 中有 C_n^k 个，这里 $k=1,2\cdots,n$。因此顶点 $o=00\cdots0$ 到 $V(Q_n)-\{o\}$ 中顶点的距离和为

$$\sigma_o(G)=\sum_{x\in V(G)}d_G(o,x)=1C_n^1+2C_n^2+\cdots kC_n^k+\cdots+nC_n^n$$

由于

$$kC_n^k=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

故 $\sigma_o(G)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{x\in V(G)}d_G(o,x)=nC_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+\cdots+nC_{n-1}^{k-1}+\cdots+nC_{n-1}^{n-1}\\&=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{k-1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1})\\&=n2^{n-1}\end{aligned}$$

因此 Q_n 的平均距离为

$$\mu(Q_n)=\frac{\sigma(Q_n)}{|V(Q_n)|\cdot|V(Q_n)-1|}=\frac{\sigma_o(Q_n)\cdot|V(Q_n)|}{|V(Q_n)|\cdot|V(Q_n)-1|}=\frac{\sigma_o(Q_n)}{|V(Q_n)-1|}=\frac{n2^{n-1}}{2^n-1}$$

定理 2：如果 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\le l\le n-1$，则 $\gamma_l(Q_n)=2$。

证明：由距离控制数的定义，显然 $\gamma_l(Q_n)\geqslant2$。只需证当 $l=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 时 $\gamma_l(Q_n)\leqslant2$。令 $D=\{o,e\}$，其中 $o=00\cdots0,e=11\cdots1$，对于 $V(Q_n)-D$ 中的任意顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$，不妨设 $x=\overbrace{0\cdots0}^{t}\overbrace{1\cdots1}^{n-t}$，这里 $1\leqslant t\leqslant n-1$。易知 o 和 x 的距离为 $n-l$，e 和 x 的距离为 l。由于 $1\leqslant t\leqslant n-1$，且 $min\{n-l,l\}\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=l$，故 D 能距离 l-控制顶点 x。由 x 的任意性，有 $\gamma_l(Q_n)\leqslant2$。

定理 3：如果 $l\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$，则 $\gamma_l(Q_n)\geqslant3$。

证明：显然 $\gamma_l(Q_n)\geqslant2$，只需证 $\gamma_l(Q_n)$ 不可能等于 2，用反证法证明。由超立方体网络的点可迁性，假设 $D=\{o,y\}$ 能距离 l-控制 $V(G)-D$ 中的任意顶点，其中 $o=00\cdots0$，y ? $\overbrace{0\cdots0}^{n?s}\overbrace{1\cdots1}^{s}$，这里 $1\leqslant s\leqslant n$。对于 $V(G)-D$ 中的顶点 $x=\overbrace{1\cdots1}^{\lceil n/2\rceil}\overbrace{0\cdots0}^{\lfloor n/2\rfloor}$，易知 o 和 x 的距离为 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil>l$。故点 o 不能距离 l-控制点 x。

情形 1：如果 $1\le s\le\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$，则易知 y 和 x 的距离为

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-s=n-s\ge n-\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor>l$$

情形 2：如果 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\le s\le n$，则 y 和 x 的距离为

$$n-s+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\ge\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil>l$$

故 y 也不能距离 l-控制顶点 x，由 D 的一般性，因此 $\gamma_l(Q_n)\geqslant3$。

定理 4：如果 $\left\lceil\frac{2n-2}{3}\right\rceil+1\le d\le n-1$，则 $\alpha_d(Q_n)=2$。

证明：由距离独立数的定义，显然 $\alpha_d(Q_n)\geqslant2$，只需证 $d=\left\lceil\frac{2n-2}{3}\right\rceil+1$ 时 $\alpha_d(Q_n)\leqslant2$。不妨设 $I=\{o,z\}$，其中 $o=00\cdots0$，$z=\overbrace{0\cdots0}^{n-s}\overbrace{1\cdots1}^{s}$，这里 $\left\lceil\frac{2n-2}{3}\right\rceil+2\le s\le n$。

假设 I 中存在异于 o 和 z 的顶点 x,不妨设

$x=\overbrace{1\cdots1}^{n-s}\overbrace{0\cdots0}^{s-t}\overbrace{1\cdots1}^{t}$,这里 $0\leqslant t\leqslant s$,易知 o 和 x 的距离为 $n-s+t$,z 和 x 的距离为 $n-t$。

如果 o 和 x 的距离 $n-s+t\geq\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor+2$,即 $t\geq s-n+\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor+2$,则 z 和 x 的距离

$$n-t\leq 2n-s-\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor-2\leq 2n-2\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor-4\leq\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor+1=d$$

此时 $x\notin I$。

如果 o 和 x 的距离 $n-s+t\leq\left\lfloor\frac{2n-2}{3}\right\rfloor+1$,显然 $x\notin I$。

因此,I 中至多有两个顶点,故 $\alpha_d(Q_n)=2$。

参考文献:

[1]Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M].American Elsevier Publishing Co. Inc. New York, 1976.

[2]徐俊明.互连网络拓扑结构分析[M].合肥:中国科学技术大学研究生教材,2002:108.

[3]Tian Fang, Xu Jun-ming. Distance domination numbers of generalized de Bruijn and Kautz digraphs [J]. OR Transactions, 2006, 10(1): 88-94.

[4]Dankelmann P. Average distance and domination numbers [J]. Discrete Application Mathematics, 1997, 80: 21-35.

[5]Tian Fang, Xu Jun-ming. Average distance and distance domination numbers [J]. Discrete Applied Mathematics, 2009,157(5):1113-1127.

责任编辑:胡德明

Parameters on Distance of Hypercube

Xie Xin

(Department of Mathematics, Huangshan University, Huangshan 245041, China)

Abstract: The average distance, distance domination number and distance independence number are all important parameters to measure the performance of a network. In some sense, the average distance can more precisely measure the performance of a network than the diameter. It is well known that to determine distance domination number and distance independence number are NPC problems, so it is very important to determine distance domination number and distance independence number of some special graphs for given integers d and l. This paper obtains the average distance of hypercubic network, and its distance domination number and distance independence number for some integers d and 1.

Key words: average distance; distance domination number; distance independence number; hypercubic network

超立方体网络的距离参数

作者： 谢歆， Xie Xin
作者单位： 黄山学院,教学系,安徽,黄山,245041
刊名： 黄山学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HUANGSHAN UNIVERSITY
年，卷(期)： 2010，12(5)

参考文献(5条)

1. Bondy J A.Murty U S R Graph theory with applications 1976
2. 徐俊明 互连网络拓扑结构分析 2002
3. 田方.徐俊明 广义de Bruijn和Kautz有向图的距离控制数 2006(1)
4. Dankelmann P Average distance and domination numbers 1997
5. Tian Fang.Xu Jun-ming Average distance and distancedomination numbers 2009(5)